

珠链喷泉原理模型

罗 良¹, 龙春晖², 杨 翔¹, 陈梦妮¹, 马力果¹, 钱 坤¹

(1. 湖南理工学院 物理与电子科学学院, 湖南 岳阳 414006; 2. 岳阳市第九中学, 湖南 岳阳 414000)

摘 要: 珠链喷泉是一个非常有趣的物理实验, 对其原理分析大都归因于结构因素. 尝试从相互作用力和惯性的角度提供一种解释, 说明其他外界因素对珠链喷泉实验的影响, 并为绳链喷泉实验提供解释. 以飞行高度与速度都不变的类稳态为切入点, 假设珠链向上跃起的因素为内部相互作用力和惯性, 珠链内存在的法向力形式为 $F_n = a/r^n$, 从而建立珠链类稳态运动模型, 推导并求解微分方程, 得到珠链喷泉飞行轨迹函数表达式. 利用录像取帧法测出的珠链速度和飞跃高度数据证实模型的正确性.

关键词: 珠链喷泉; 理论分析; 录像取帧

中图分类号: O369

文献标识码: A

文章编号: 1672-5298(2022)04-0014-04

Model of Bead Chain Fountain Principle

LUO Liang¹, LONG Chunhui², YANG Xiang¹, CHEN Mengni¹,
MA Ligu¹, QIAN Kun¹

(1. School of Physics and Electronic Science, Hunan Institute of Science and Technology, Yueyang 414006, China;
2. No. 9 Middle School in Yueyang, Yueyang 414000, China)

Abstract: Bead chain fountain is a very interesting physical experiment. The principle analysis of it is mostly attributed to structural factors. This paper attempts to provide an explanation from the perspective of interaction force and inertia to explain the influence of other external factors on bead chain fountain experiment. Taking the quasi steady state with constant flight altitude and speed as a starting point, assuming that the factors for the upward jump of the bead chain are internal interaction force and inertia, and the form of normal force in the bead chain is $F_n = a/r^n$, the quasi steady state motion model of the bead chain was established, and the differential equation is deduced and solved, the flight trajectory function expression of bead chain fountain was obtained. The data of bead chain speed and leap height measured by video framing method effectively confirmed the correctness of the model.

Key words: bead chain fountain; theoretical analysis; video framing

0 引言

一条足够长的珠链有序地堆叠在一个容器内, 给予其悬挂于容器外的部分一个合适的初速度, 珠链在重力作用下会逐渐加速下落, 当速度增加到足够大时, 珠链即可飞跃起来, 这就是珠链喷泉实验(见图 1). Herrmann^[1]等用动量流与能流对珠链喷泉现象进行分析, 得出珠链喷泉最大高度为 H_0 , 最大速度为 $v^2 = 2gH_0$ (H_0 为杯子距离地面高度). 夏艳^[2]等构建由两段直线与一段半圆组成的珠链喷泉稳定状态模型, 分析珠链飞起高度的数值关系. 国内外学者大多认为珠链向上飞跃的推力来源是珠链两小球与杆组成的基本结构在转动过程中杯子给予其的反作用力^[1-7]. 在进一步考虑珠链大小、距地高度和用绳子代替珠链进行的珠链喷泉扩展实验时, 发现一些奇特的实验现象(见图 2), 即无珠链基本构造的绳链也可展现出同样的喷泉现象. 本文将从相互作用力与惯性的角度出发, 建立珠链喷泉模型. 对珠链运动中的类稳态问题采用微元法进行分析, 建立非半圆



图 1 珠链喷泉

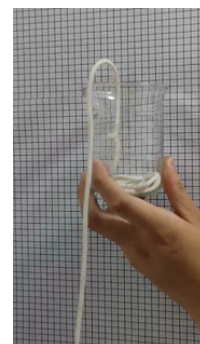


图 2 绳链的喷泉现象

收稿日期: 2022-03-10

基金项目: 湖南省教育厅教学改革项目“回归工程设计——面向新工科建设的电子类核心课程教学模式改革与实践”(2020-626)

作者简介: 罗 良, 男, 博士, 副教授. 主要研究方向: 物理学和教育学

通信作者: 钱 坤, 男, 博士, 讲师. 主要研究方向: 微电子学

轨迹模型,并利用录像取帧技术^[8]进行数据采集,以验证模型的正确性.

1 珠链喷泉物理原理

通过实验观测,发现珠链喷泉具有以下几个性质:

- (1) 在珠链总长度($L_{\text{总}}$)与杯子离地高度($H_{\text{地}}$)相同的前提下,线密度越大的珠链飞得越高(见图3).
- (2) 在 $L_{\text{总}}$ 与珠链线密度相同的前提下, $H_{\text{地}}$ 越大则珠链飞得越高(见图4).
- (3) 在珠链线密度与 $H_{\text{地}}$ 相同的前提下,杯内剩余珠链的数量越多则飞起的高度越高(见图5).
- (4) 在珠链离开杯子的最后一小段其飞跃的高度会突增(见图6),绳子也有同样的情况.
- (5) 当杯子离地高度 $H_{\text{地}}$ 不变,且杯中有足够多的珠链时,珠链最高点超过杯口高度(h)基本不变.

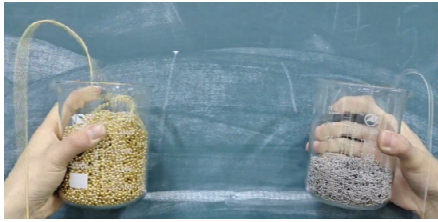


图3 珠链线密度越大则飞得越高



图4 $H_{\text{地}}$ 越大则飞得越高

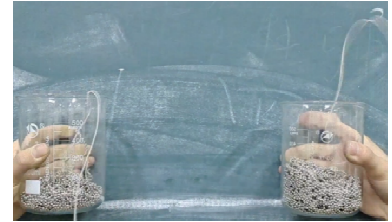
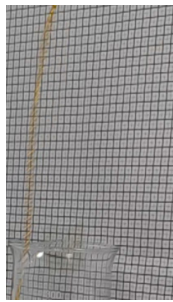
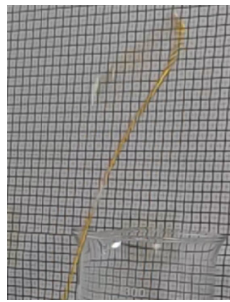


图5 杯内剩余珠链越多飞得越高



(a) 突变之前



(b) 最高点已经飞出镜框

图6 最后一小段高度突增



(c) 绳链

根据性质(5),珠链喷泉存在一个类稳态阶段,在该状态下整条珠链的速度、轨迹不变,并以此建立非半圆模型.

在类稳态下,珠链形状不变,可以看成一个个微元按照既定的轨道运动,因此分析一个微元的运动即可推出整体珠链的运动状态.在腾空的珠链中选择任意微元进行受力分析(见图7),其中微元的质量为 $m = M/L$,此即珠链的线密度.

在类稳态下整条珠链的速率相同且不变,故根据牛顿第二定律得

$$F_t = G_t = G \sin \theta = G \sin \alpha,$$

$$F_n + G_n = F_n + G \cos \theta = F_n + G \cos \alpha = \frac{mv^2}{r}. \quad (1)$$

其中 F_t 、 F_n 、 G_t 、 G_n 为该微元所受切向力和法向力, r 为轨迹曲率半径, θ 取顺时针为正.

法向力 F_n 是一个未知函数,且无法从实验测得.仔细观察珠链的结构不难发现,当珠链慢慢弯曲时,随着弯曲程度增大,需要的力越大.因此珠链间的作用力,也随着弯曲程度的变化而变化,且随着曲率半径的增大而减小.假设类稳态中法向力的形式为 $F_n = a/r^n$.其中 a, n 为常数,且都只与珠链本身有关.本文考虑 $n=1, n=2$ 两种情况, a 由实验数据拟合计算得出.

情况1: $F_n = a/r$

根据法向力假设,式(1)可进一步写成

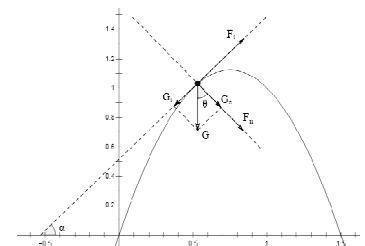


图7 受力分析

$$\frac{a}{r} + G \cos \alpha = \frac{mv^2}{r}. \quad (2)$$

曲率半径表达式为

$$r = \left| \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} \right|. \quad (3)$$

利用函数一阶导数的几何意义($y' = \tan \theta$)与三角函数恒等式, 联立式(2)和(3), 积分得

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{A} \ln \frac{\cos \theta_0}{\cos \theta}, & 0 < x < x_m, & 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ y = \frac{1}{A} \ln \frac{\cos \theta}{\cos \theta_0}, & x > x_m, & 0 < -\theta < \frac{\pi}{2}, \\ x = \frac{1}{A} \theta, & 0 < x < x_m, & 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ x = x_m - \frac{1}{A} \theta, & x > x_m, & 0 < -\theta < \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (4)$$

$\theta = 0$ 时, 对应最大飞跃高度, 即

$$h = -\frac{1}{A} \ln \cos \theta_0 = -\left(\frac{v^2}{g} - \frac{a}{mg}\right) \ln \cos \theta_0. \quad (5)$$

经过大量实验观察发现, θ_0 都接近 $\pi/2$, 故 $\ln \cos \theta_0 < 0$. 对式(5)进行分析可知, 速度越大则跃起的高度越高; 若 $a > 0$ 则质量越大的珠链跃起的高度越高. 式(5)最大高度的关系式对实验有指导作用.

情况 2: $F_n = a/r^2$

讨论更为一般的法向力, 根据向心力公式有

$$mg \cos \theta + \frac{a}{r^n} = m \frac{v^2}{r}. \quad (6)$$

取 $n = 2$, 联立式(3)和(6), 化简可得高度与角度的直接关系:

$$\begin{cases} \frac{dy}{d\theta} = \frac{-C_2 - \sqrt{C_2^2 - C_1 \cos \theta}}{2g \cot \theta}, & x < x_m, \\ \frac{dy}{d\theta} = \frac{C_2 - \sqrt{C_2^2 - C_1 \cos \theta}}{2g \cot \theta}, & x > x_m. \end{cases} \quad (7)$$

其中 $C_2 = v^2$, $C_1 = 4ga/m$.

式(7)非常复杂, 可以通过实验数据进行非线性拟合, 结合 $\frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = \tan \theta$ 求出 $y = y(x)$ 与实验结果进行比较.

2 实验验证

设置合适的背景(刻度板), 利用手机对珠链喷泉进行慢动作录像, 再使用视频截屏软件 PR 对录像进行处理以测量最大飞跃高度与速度等参数, 用电子秤和卷尺测量线密度.

(1) $F_n = a/r$ 时的参数拟合与误差分析

将实验中得到的各数据代入式(5)中, 计算结果见表 1. 其中 h 为杯口到顶点距离, h_1 为杯内静止部分珠链到顶点距离, 取 $\theta_0 = 87.75^\circ$.

表 1 实验数据与结果

序号	速度 v (15 帧)	h	h_1	计算 a	计算 a_1	线密度
1	5.568 m/s	0.144 m	0.210 m	0.4503	0.4483	0.014667 kg/m
2	5.568 m/s	0.144 m	0.222 m	0.4503	0.4480	
3	5.568 m/s	0.150 m	0.222 m	0.4502	0.4480	

从表1可以看出,用 h_1 计算的 a_1 值与 h 计算的 a 值相差较小.为了方便读数与测量,下文的实验分析采用 a 值进行分析.取 $a=0.4503$,回代入式(6).图8为模拟珠链轨迹和珠链实际轨迹对比图,图9为珠链实际轨迹照片,图10为相对误差图.可见计算值与实际测量值的误差在5%以内.

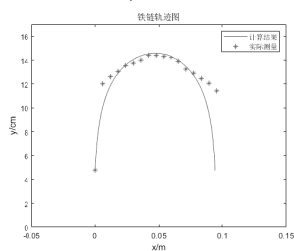


图8 计算值与实际值比较

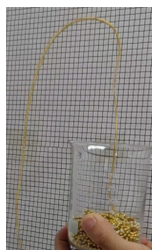


图9 实际轨迹

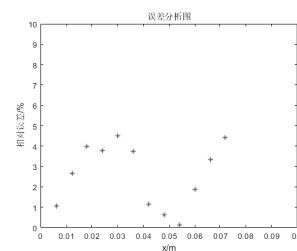


图10 误差分析

(2) $F_n = a/r^2$ 时的参数拟合与误差分析

根据式(7),取参数 $a=0.0318$, $y_0=0.075m$ 代入式(7)进行数值积分,绘制误差图和轨迹图,如图11和图12所示.

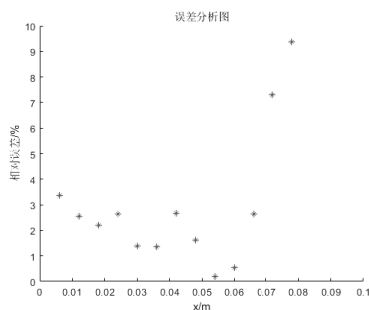


图11 金色珠链误差

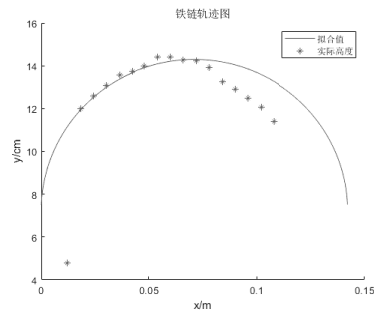


图12 金色珠链轨迹

分别分析不同法向力情况下的误差,误差大部分在3%到5%以内,因此本模型可以很好地解释珠链喷泉现象.由公式 $h = -(\frac{v^2}{g} - \frac{a}{mg}) \ln \cos \theta_0$ 可知,珠链最大飞跃高度与珠链速度和线密度成正比.珠链最大飞跃高度还与杯子距离地面高度成正比,因为距离地面高度越高,则珠链加速时间越长,达到类稳态时速度越大,从而飞跃高度越高.杯内剩余链条数量越多,则处于稳态时间越长,比珠链数量少(在运动过程中还未达到稳态就已结束)的速度大,故飞跃高度越高.当最后一段珠链飞出杯口时,法向力常数发生突变,故高度会发生突变.至于绳子为何可以飞跃一定高度,可能是因为绳子的质量较小,运动过程中速度较大,由于惯性的原因飞起了一定高度.

3 结束语

本文以珠链喷泉实验现象中的类稳态为切入点,建立数学物理方程,通过理论分析和数值模拟方法,得到了珠链喷泉飞跃高度、珠链速度和杯口距地高度之间的关系式.利用手机慢镜头摄像,通过录像取帧法测出珠链速度和飞跃高度数据,实验数据有效证实了模型的正确性.

参考文献:

- [1] Herrmann F. 珠链喷泉中的动量流和能流[J]. 陈敏华,译. 物理教学探讨, 2016, 34(11): 14~17
- [2] 夏艳, 杨绍兰, 张飞翔. 刍议一个有趣的力学实验: 神奇的“链条喷泉”[J]. 物理教师, 2015, 36(10): 74~76
- [3] 王小庆. 神奇的“珠链喷泉”之谜[J]. 物理教师, 2020, 41(7): 56~57
- [4] Pfeiffer F, Mayet J. Stationary dynamics of a chain fountain[J]. Archive of Applied Mechanics, 2017, 87: 1411~1426
- [5] Pantaleone J. A quantitative analysis of the chain fountain[J]. American Journal of Physics, 2017, 85(6): 414~421
- [6] Pantaleone J, Smith R. A bullet-block experiment that explains the chain fountain[J]. The Physics Teacher, 2018, 56: 294~297
- [7] Biggins J S, Warner M. Understanding the chain fountain[J]. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2014, 470: 20130689.1~20130689.8
- [8] 张春玲, 唐蕾, 钱钧, 等. 利用取帧技术在气轨上验证变力做功[J]. 物理实验, 2011, 31(4): 31~33