第 36 卷 第 4 期　　湖南理工学院学报(自然科学版)　　Vol.36 No.4
2023 年 12 月　　Journal of Hunan Institute of Science and Technology (Natural Sciences)　　Dec. 2023

一类偏积分微分方程的时间隐显方法研究

陈迎姿[1], 胡小松[2]

(1. 广东金融学院 金融数学与统计学院, 广东 广州 510521
2. 深圳市政集团有限公司, 广东 深圳 518000)

摘　要: 期权定价方程是现代金融理论的重要研究工具. 随着期权市场的快速发展, 对期权定价理论的研究由简单的 Black-Scholes 方程转变为带跳扩散方程. 以 Merton 提出的带跳扩散方程为研究对象, 其对应的是一个偏积分微分方程, 利用隐显中点方法对时间进行离散. 通过 Matlab 编写相应程序, 数值模拟实验结果表明, 该方法是稳定的和收敛的.

关键词: 期权定价; 偏积分微分方程; 有限差分法; 隐显方法

中图分类号: O241.8　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1672-5298(2023)04-0001-05

Study on Time Implicit-explicit Method for a Class of Partial Integro-differential Equations

CHEN Yingzi[1], HU Xiaosong[2]

(1. Department of Financial Mathematics and Statistics, Guangdong University of Finance, Guangzhou 510521, China;
2. Shenzhen Municipal Engineering Corporation, Shenzhen 518000, China)

Abstract: Option pricing equation is an important research tool of modern financial theory. With the rapid development of option market, the research on option pricing theory has changed from Black-Scholes equation to jump-diffusion equation. In this paper, the diffusion equation with jump proposed by Merton is taken as the research object, which corresponds to a partial integro-differential equation. The implicit-explicit midpoint method is used to discretize the time. The corresponding program is written by Matlab, and the results show that the method is stable and convergent.

Key words: option pricing; partial integro-differential equation; finite difference methods; implicit-explicit method

0 引言

期权定价理论是金融市场的研究热点之一. 1973 年 Black 和 Scholes[1]发表了期权定价的开创性论文, 期权定价理论的研究从此实现重大突破. 随着研究的不断深化, 出现了一系列期权定价模型. 带跳期权定价问题满足一个偏积分微分方程, 方程中包含非局部积分项, 给模型的数值计算带来了一定的困难. 有限差分法[2,3]和有限元法[4]是最常用的空间离散方法. 由于积分算子的非局部性, 隐式时间离散通常会导致一个具有满系数矩阵的代数方程组. 因此, 研究人员致力于寻求一些好的迭代方法来求解这个稠密的代数系统, 如文[5~10]. 为了避免求解具有满系数矩阵的代数方程组, Cont 等[11]将隐式方法和显式方法结合起来, 提出隐显 Euler 方法, 即对扩散部分进行隐式处理, 对非局部积分算子进行显式处理. 运用时间隐显方法求解带跳期权定价问题在不降阶的情况下大大减少了计算时间. 在随后研究中, 涌现出大量关于期权定价问题的隐显方法的成果, 如文[12~16]. 本文运用隐显时间离散方法对带跳期权定价问题进行求解, 并给出相应的数值实例来验证方法的有效性.

1 跳扩散过程下期权定价数学模型

本文研究在跳扩散过程下期权定价问题对应的数学模型. 假设标的资产价格 $S(0 \leqslant S < +\infty)$ 满足如下随机微分方程[17]

收稿日期: 2022-03-09
基金项目: 国家自然科学基金青年项目(12101141)
作者简介: 陈迎姿, 女, 博士, 讲师. 主要研究方向: 微分方程数值方法及应用

$$\frac{\mathrm{d}S}{S}=\nu\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}W(t)+(\eta-1)\,\mathrm{d}N(t).\tag{1}$$

其中$W(t)$和$N(t)$分别为完备概率空间上的标准布朗运动和强度为λ的泊松过程, 且$W(t)$和$N(t)$相互独立; ν和σ为资产价格没有发生跳跃时的期望收益率和波动率; $\eta-1$表示资产价格的跳跃幅度函数, 且平均跳跃强度$\kappa=E(\eta-1)$, 当$\mathrm{d}N(t)=0$时有密度函数$1-\lambda\mathrm{d}t$, 当$\mathrm{d}N(t)=1$时有密度函数$\lambda\mathrm{d}t$.

在以上假设条件已知的情况下, 期权价值$V(t,S)$满足如下偏积分微分方程(PIDE)的终值问题

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2V}{\partial S^2}+(r-\lambda\kappa)S\frac{\partial V}{\partial S}-(r+\lambda)V+\lambda\int_0^\infty V(t,S\eta)\,g(\eta)\,\mathrm{d}\eta=0.\tag{2}$$

这里r表示无风险利率, $g(\eta)$是跳跃幅度η的概率密度函数, 对所有$\eta>0$有$g(\eta)\geqslant 0$, 且$\int_0^\infty g(\eta)d\eta=1$. 在 Merton 提出的模型中, $g(\eta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\gamma\eta}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln\eta-\mu)^2}{2\gamma^2}}$.

资产的平均相对变化为$\kappa=E(\eta-1)=\mathrm{e}^{\mu+\gamma^2/2}-1$, 对于标准的欧式看跌期权, 期权在到期日$t=T$满足终值条件$V(T,S)=\begin{cases}\max(0,S-K), & \text{看涨期权},\\ \max(0,K-S), & \text{看跌期权},\end{cases}$ K为执行价格.

对方程(2)进行变量替换, 取

$$x=\ln(S/K),\quad y=\ln\eta,\quad \tau=T-t,\ V(T-t,\mathrm{e}^x)=u(\tau,x),$$

于是期权$u(\tau,x)$满足偏积分微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}=\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2-\lambda\kappa)\frac{\partial u}{\partial x}-(r+\lambda)u+\lambda\int_{-\infty}^\infty u(\tau,y)f(y-x)\,\mathrm{d}y,\tag{3}$$

对应的密度函数为$f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\gamma}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\gamma^2}}$. 考虑欧式看跌期权的情形, 其初值条件和边界条件分别为

$$u(0,x)=\max(K-K\mathrm{e}^x,0),\quad u(t,x)=\begin{cases}K\mathrm{e}^{-r\tau}-K\mathrm{e}^x, & \text{当}x\to-\infty,\\ 0, & \text{当}x\to+\infty.\end{cases}$$

2 数值离散

以欧式看跌期权为例, 方程(2)的求解区域是$(t,S)\in[0,T]\times(0,+\infty)$. 当$S\to+\infty$时, 期权价值趋近于0, 即$\lim\limits_{S\to+\infty}V(S,t)=0$; 当$S\to 0$时, 期权价值趋近于$K$, 即$\lim\limits_{S\to 0}V(S,t)=K$. 由于在实际交易中, 资产价格不会出现 0 或$+\infty$的情形, 为了便于计算, 假设$S\in[S_{\min},S_{\max}]$, 则方程(2)的空间求解区域为$S\in[S_{\min},S_{\max}]$, 方程(3)的求解区域为$x\in\Omega=[x_{\min},x_{\max}]$, 其中$x_{\min}=\ln(S_{\min}/K),\quad x_{\max}=\ln(S_{\max}/K)$.

考虑 PIDE 方程在如下截断区域上的隐显时间半离散格式:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(\tau,x)}{\partial\tau}=Du(\tau,x)+\lambda Ju(\tau,x), & (\tau,x)\in[0,T)\times\Omega,\\ u(0,x)=\max(K-K\mathrm{e}^x,0), & x\in\overline{\Omega}.\end{cases}$$

其中D是微分算子, J是积分算子, 即

$$Du=\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2-\lambda\kappa)\frac{\partial u}{\partial x}-(r+\lambda)u,\tag{4}$$

$$Ju(\tau,x)=\int_{-\infty}^\infty u(\tau,y)\,f(y-x)\,\mathrm{d}y.\tag{5}$$

2.1 时间离散

取$\{0<\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_N=T;\ \tau_n-\tau_{n-1}=k,1\leqslant n\leqslant N\}$作为区间$[0,T]$上的分割. 记$u^n=:u(\tau_n,x)$, 则方程(3)按隐显中点格式离散:

$$\frac{u^{n+1}-u^{n-1}}{2k}=\frac{1}{2}(Du^{n+1}+Du^{n-1})+\lambda Ju^n,\ n\geqslant 1,$$

相应的边界条件为

$$u^{n+1}(x_{\min}) = K\mathrm{e}^{-r\tau_{n+1}} - K\mathrm{e}^{x_{\min}},\ u^{n+1}(x_{\max}) = 0.$$

上述隐显中点格式是一个三层时间离散格式, 为了采用该格式还需要初值u^0和u^1. u^0已由模型的初值条件给出, u^1可以采用隐显向后 Euler 方法得到:

$$\frac{u^1 - u^0}{k} = Du^0 + \lambda J u^0,$$

相应的初值条件为

$$u^1(x_{\min}) = K\mathrm{e}^{-r\tau_1} - K\mathrm{e}^{x_{\min}},\ u^1(x_{\max}) = 0.$$

2.2 空间离散

将空间区间$\Omega = [x_{\min}, x_{\max}]$分成$M$等份($M$为偶数), 即

$$\{x_{\min} = x_0 < x_1 < \ldots < x_{M+1} = x_{\max};\ x_{i+1} - x_i = h, 1 \leqslant i \leqslant M\}.$$

对偏导数$\frac{\partial u}{\partial x}$和$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$采用二阶中心有限差分近似, 记$u(\tau_n, x_i) =: u_i^n$则有

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\tau_n, x_i) = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} + O(h^2), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\tau_n, x_i) = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + O(h^2).$$

将其代入到式(4)中, 有

$$Du(\tau_n, x_i) = \frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda\kappa)\left(\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h}\right) - (r+\lambda)u_i^n + O(h^2).$$

为了数值逼近积分算子(5), 将积分区间分成Ω和$\Omega^c = R \setminus \Omega$两部分, 那么积分项也可以分成两部分

$$Ju(\tau_n, x_i) = \int_R u(\tau_n, y) f(y - x_i)\mathrm{d}y + R(\tau_n, x_i) =: E_i^n + R_i^n. \tag{6}$$

对于欧式看跌期权, $R(\tau_n, x_i)$满足

$$R_i^n = K\mathrm{e}^{-r\tau_n}\Phi\left(\frac{x_{\min} - x_i - \mu}{\gamma}\right) - K\mathrm{e}^{x+\mu+\frac{\gamma^2}{2}}\Phi\left(\frac{x_{\min} - x_i - \mu - \gamma^2}{\gamma}\right),$$

其中$\Phi(x)$是正态分布的累积函数. 在区间R上, 利用复合梯形求积公式, 积分项可以用如下等式逼近

$$E_i^n = \int_R u(\tau_n, y) f(y - x_i)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}u_0^n f_{i,0} + \sum_{j=1}^{M} u_j^n f_{i,j} + \frac{1}{2}u_{M+1}^n f_{i,M+1} + O(h^2),$$

其中$f_{i,j} = f(x_j - x_i)$.

令$U^n = (u_1^n, u_2^n, \cdots, u_M^n)^T$, $a = \frac{1}{2}\sigma^2, b = r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda\kappa, c = r + \lambda$, 则 PIDE 可离散为矩阵方程

$$(I - A)U^{n+1} = (I + A)U^{n-1} + B^n + d^n, n \geqslant 1.$$

其中$A = \mathrm{diag}(\alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1)$是一个三对角矩阵, 且

$$\alpha_{-1} = \frac{k}{h^2}(a - bh),\ \alpha_0 = -\frac{k}{h^2}(2a + ch^2),\ \alpha_1 = \frac{k}{h^2}(a + bh);$$

B^n和d^n是$(M-1)\times 1$的列向量, 对$i = 1, 2, \cdots, M-1$, 有

$$B_i^n = 2k\lambda(E_i^n + R_i^n), \quad d^n = (\alpha_{-1}(u_0^{n+1} + u_0^{n-1}), 0, \cdots, 0, \alpha_1(u_{M+1}^{n+1} + u_{M+1}^{n-1}))^T.$$

当$n = 0$时, PIDE 可离散为矩阵方程

$$(I - A)U^1 = B^0 + d^0,$$

其中$B_i^0 = 2k\lambda(E_i^n + R_i^n)$, $d^n = (\alpha_{-1}u_0^1, 0, \cdots, 0, \alpha_1 u_{M+1}^{n+1})^T$.

3 数值实例

本节将通过两个数值实例对欧式期权进行数值模拟, 验证本文算法的有效性. 对于方程(2)的求解, Merton 给出了期权价值的一种级数表示形式:

$$V(t,S)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda'\tau)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda'\tau}V_{BS}(\tau,S,K,r_n,\sigma_n). \tag{7}$$

其中 $\tau=T-t,\tau\in[0,T]$，且

$$\lambda'=\lambda(1+\kappa),\quad \sigma_n^2=\sigma^2+\frac{n\gamma^2}{\tau},\ r_n=r-\lambda\kappa+\frac{n}{\tau}(\mu+\frac{1}{2}\gamma^2);$$

$V_{BS}(\tau,S,K,r_n,\sigma_n)$ 是资产价格没有发生跳跃时欧式期权的价值，满足

$$V_{BS}(\tau,S,K,r_n,\sigma_n)=\begin{cases}S\Phi(d_1)-K\mathrm{e}^{-r_n\tau}\Phi(d_2), & \text{欧式看涨期权,}\\ K\mathrm{e}^{-r_n\tau}\Phi(-d_2)-S\Phi(-d_1), & \text{欧式看跌期权.}\end{cases}$$

这里

$$d_1=\frac{\ln(S/K)+(r_n+\sigma_n^2/2)\tau}{\sigma_n\sqrt{\tau}},\ d_2=\frac{\ln(S/K)+(r_n-\sigma_n^2/2)\tau}{\sigma_n\sqrt{\tau}}=d_1-\sigma_n\sqrt{\tau}.$$

欧式看跌期权的解析解可根据上述公式计算，通常只需要求和中的前五项或六项就可以获得期权价值的六位数精度.

例 1 欧式看跌期权的参数取值[14,15]为

$$\sigma=0.15,\ r=0.05,\ \lambda=0.1,\ T=0.25,\ K=100,\ \mu=-0.90,\ \gamma=0.45,\ x_{\min}=-1.5,\ x_{\max}=1.5.$$

根据式(7)计算得到的参考解为：当 $S=90$ 时，期权值为 9.285418；当 $S=100$ 时，期权值为 3.149026；当 $S=110$ 时，期权值为 1.401186. 对选取粗网格和细网格的数值结果进行比较，表 1 给出了看跌期权在不同网格下，当 $S=90$、100、110 时的数值解，并比较了数值解与参考解之间的误差和收敛阶. 从表 1 中可以看出，数值解的收敛阶接近二阶，与理论相符.

表 1 欧式看跌期权在不同网格下的数值解和收敛阶

M	N	$S=90$			$S=100$			$S=110$		
		Value	Error	Order	Value	Error	Order	Value	Error	Order
128	25	9.283423	1.9948e−03		3.113927	3.5099e−02		1.395736	5.4502e−03	
256	50	9.285125	2.9273e−04	2.77	3.139846	9.1801e−03	1.93	1.399754	1.4322e−03	1.93
514	100	9.285329	8.8624e−05	1.72	3.146285	2.7406e−03	1.74	1.400755	4.3136e−04	1.73
1024	200	9.285393	2.5452e−05	1.80	3.148155	8.7105e−04	1.65	1.401064	1.2217e−04	1.82
2048	400	9.285411	7.2754e−06	1.81	3.148775	2.5076e−04	1.80	1.401153	3.3154e−05	1.88
4096	800	9.285416	1.7165e−06	2.08	3.148961	6.4962e−05	1.95	1.401177	8.6053e−06	1.95

例 2 欧式看涨期权的参数取值[14,15]为

$$\sigma=0.20,\ r=0,\ \lambda=0.10,\ T=1.0,\ K=1,\ \mu=0,\ \gamma=0.50,\ x_{\min}=-4,\ x_{\max}=4.$$

根据式(7)计算得到的参考解为：当 $S=0.75$ 时，期权值为 0.016977；当 $S=1$ 时，期权值为 0.094136；当 $S=1.25$ 时，期权值为 0.275061. 对选取粗网格和细网格的数值结果进行比较，表 2 给出了看涨期权在不同网格下，当 $S=0.75$、1、1.25 时的数值解，并比较了数值解与参考解之间的误差和收敛阶. 从表 2 中可以看出，数值解的收敛阶接近二阶，与理论相符.

表 2 欧式看涨期权在不同网格下的数值解和收敛阶

M	N	$S=0.75$			$S=1$			$S=1.25$		
		Value	Error	Order	Value	Error	Order	Value	Error	Order
128	25	0.015527	1.4498e−03	2.10	0.089385	4.7509e−03		0.272824	2.2366e−03	
256	50	0.016638	3.3868e−04	1.86	0.092864	1.2717e−03	1.90	0.274436	6.2435e−04	1.84
514	100	0.016884	9.3300e−05	2.00	0.093788	3.4714e−04	1.87	0.274875	1.8520e−04	1.75
1024	200	0.016954	2.3388e−05	1.89	0.094039	9.6036e−05	1.85	0.275010	5.0419e−05	1.88
2048	400	0.016971	6.3067e−06	2.06	0.094107	2.8670e−05	1.74	0.275046	1.4450e−05	1.80
4096	800	0.016976	1.5076e−06	2.10	0.094128	7.2701e−06	1.98	0.275057	3.7230e−06	1.96

例 3 欧式看跌期权的参数取值[14,15]为

$$\sigma = 0.30,\ r = 0,\ \lambda = 1.0,\ T = 0.5,\ K = 100,\ \mu = 0,\ \gamma = 0.50,\ x_{\min} = -2,\ x_{\max} = 2.$$

根据式(7)计算得到的参考解为: 当 $S = 100$ 时, 期权值为 15.034789. 分别采用显式方法、隐式方法和本文提出的隐显中点方法对欧式看跌期权模型进行时间离散, 计算出三种方法的误差和 CPU 时间, 结果见表 3. 从表 3 中可以看出, 本文方法在误差上明显优于显式方法, 且相较于隐式方法在 CPU 时间上大大减少. 由此可见, 本文提出的隐显中点方法在求解该类问题上具有一定的优势.

表 3　欧式看跌期权在不同时间离散方法下的误差和 CPU 时间

M	N	隐显中点方法		显式方法		隐式方法	
		Error	CPU(s)	Error	CPU(s)	Value	CPU(s)
20	10	4.8285e−01	0.0213	5.7285e−01	0.0256	4.5275e−01	0.0026
40	20	7.2375e−02	0.0083	1.0284e−01	0.0074	6.6329e−02	0.0730
80	40	1.8525e−02	0.0110	2.6426e−02	0.0097	1.5325e−02	0.2521
160	80	4.3229e−03	0.0245	6.7115e−03	0.0232	3.6329e−03	1.0615
320	160	1.0285e−03	0.0526	1.6275e−03	0.0462	9.3053e−04	6.4226
640	320	2.3294e−04	0.1427	4.2035e−04	0.1053	2.2044e−04	47.9637
1280	640	5.4835e−05	0.4024	9.8237e−05	0.3225	5.0739e−05	352.0340

4 结束语

本文研究了偏积分微分方程的隐显时间方法, 给出了方程级数形式的解. 该隐显方法较好处理了方程中的非局部积分项, 避免求解一个带有满矩阵的线性方程组. 相比显式方法和隐式方法, 隐显方法不仅能达到理论收敛阶, 而且计算效率高.

参考文献:

[1] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of Political Economy, 1973, 81(3): 637−654.
[2] Briani M, Chioma C L, Natalini R. Convergence of numerical schemes for viscosity solutions to integro-differential degenerate parabolic problems arising in finance theory[J]. Numerische Mathematik, 2004, 98: 607−646.
[3] Fakharany M, Company R, Jódar L. Positive finite difference schemes for a partial integro-differential option pricing model[J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 249: 320−332.
[4] Feng L, Linetsky V. Pricing options in jump-diffusion models: An extrapolation approach[J]. Operations Research, 2008, 56(2): 304−325.
[5] Chen Y, Wang W, Xiao A. An efficient algorithm for options under Merton's jump-diffusion model on nonuniform grids[J]. Computational Economics, 2019, 53(4): 1565−1591.
[6] d'Halluin Y, Forsyth P A, Vetzal K R. Robust numerical methods for contingent claims under jump diffusion processes[J]. IMA Journal of Numerical Analysis, 2005, 25(1): 87−112.
[7] Tavella D, Randall C. Pricing financial instruments: The finite difference method[M]. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2000.
[8] Wang W, Chen Y. Fast numerical valuation of options with jump under Merton's model[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2017, 318: 79−92.
[9] Salmi S, Toivanen J. An iterative method for pricing American options under jump-diffusion models[J]. Applied Numerical Mathematics, 2011, 61(7): 821−831.
[10] Almendral A, Oosterlee C W. Numerical valuation of options with jumps in the underlying[J]. Applied Numerical Mathematics, 2005, 53(1): 1−18.
[11] Cont R, Voltchkova E. A finite difference scheme for option pricing in jump diffusion and exponential Lévy models[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2005, 43(4): 1596−1626.
[12] Kwon Y, Lee Y. A second-order finite difference method for option pricing under jumps-diffusion models[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2011, 49(6): 2598−2617.
[13] Kadalbajoo M K, Tripathi L P, Kumar A. Second order accurate IMEX methods for option pricing under Merton and Kou jump-diffusion model[J]. Journal of Scientific Computing , 2015, 65: 979−1024.
[14] Kadalbajoo M K, Kumar A, Tripathi L P. A radial basis function based implicit-explicit method for option pricing under jump-diffusion models[J]. Applied Numerical Mathematics, 2016, 110: 159−173.
[15] Wang W, Chen Y, Fang H. On the variable two-step IMEX BDF method for parabolic integro-differential equations with nonsmooth initial data arising in finance[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2019, 57 (3): 1289−1317.
[16] Chen Y, Xiao A, Wang W. An IMEX-BDF2 compact scheme for pricing options under regime-switching jump-diffusion models[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2019, 42(8): 2646−2663.
[17] Merton R C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous[J]. Journal of Financial Economics, 1976, 3(1−2): 125−144.