求解 Merton 跳扩散模型的隐显 BDF2 方法

方 华, 王晚生
(长沙理工大学 数学与统计学院, 长沙 410114)

摘 要: Black-Scholes 期权定价方程是现代金融理论最伟大的成就之一, 推动了全球金融市场的发展. 本文以 Merton 提出的带有跳扩散过程的偏积分微分方程为研究对象, 对空间微分算子使用有限差分方法离散. 由于空间积分算子的非局部性质, 为减少工作量, 采用显式时间离散进而推导了二阶变步长隐显 BDF 方法, 并通过数值例子验证了该方法的有效性.

关键词: Merton 跳扩散模型; 期权定价; 有限差分法; 二阶变步长隐显 BDF 方法
中图分类号: O241.8 **文献标识码**: A **文章编号**: 1672-5298(2018)01-0001-06

IMEX-BDF2 Method for Solving Merton Jump-Diffusion Model

FANG Hua, WANG Wansheng
(School of Mathematics and Computational Science, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410114, China)

Abstract: Black-Scholes option pricing equation is one of the biggest achievements in modern financial theory. In this paper, we studied the partial integro-differential equation with jump-diffusion process proposed Merton. The discretization of spatial differential operators is by finite difference method. In view of the non-local property of the spatial integral operator, we use explicit time discretization for reducing the compute cost. We further derived the variable step-size IMEX-BDF2 method for solving Merton jump-diffusion model. Numerical example illustrates the effectiveness of the proposed method.

Key words: Merton jump-diffusion model; option pricing; finite difference methods; Newton iterative method; Implicit Euler method

期权定价是近十几年来金融学的重要组成部分, 促进了全球金融市场的发展, 被认为是现代金融学的五大模块之一[4, 6, 7]. 现代期权理论最早出现于 1973 年, 美国芝加哥大学的教授 Fisher Black 和 Myron Scholes[1]提出了基于不支付红利的股票的任何一种衍生证券的价格必须满足的一个微分方程:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\dfrac{\partial V}{\partial S}-rV=0 \\ V(T,S)=\begin{cases}(S-K)^+, & (\text{看涨期权}), \\ (K-S)^-, & (\text{看跌期权}).\end{cases}\end{cases} \tag{1}$$

其中 V 表示期权的收益, S 表示股票的价格, K 表示股票的执行价格, r 表示无风险利率, σ 表示波动率.

(1)就是著名的 Black-Scholes 期权定价公式, 为投资者提供了适用于股票的任何衍生证券且计算方便的定价公式, 二人因此而获得了诺贝尔经济学奖[2,3]. 大量关于期权定价的文献都是假定期权所依赖的股票价格服从跳—扩散过程, 如 Jarrow 和 Jones[11] (1984)、Bates[12](1988)等, 这些文献中都假定跳跃过程为泊松过程; Laland[8](1985)在交易费用的条件下对欧式看涨定价问题做了分析和研究. John C.Hull[11] (1987)和 Heston Steven[5](1993)在股票满足随机波动率的条件下对欧式看涨期权定价问题做了分析和研究. 早期学者对跳跃模型定价的研究大多是使用有限差分或有限元方法, Zhang[9](1997)研究了 Merton 跳扩散模型的美式期权定价, 在时间上的离散, 对积分采用隐—显格式, 虽然这种方法可以减小计算量, 但是导致其时间步长上的稳定性受限制, 且只有一阶精度. 21 世纪, 跳—扩散模型下的期权定价成为金融市场的研究

收稿日期: 2018-01-07
基金项目: 国家自然科学基金项目(11771060, 11371074)
作者简介: 方 华(1992−), 男, 湖南岳阳人, 硕士研究生. 主要研究方向: 微分方程数值解
通讯作者: 王晚生(1977−), 男, 湖南株洲人, 教授. 主要研究方向: 微分方程数值解

热点. 由于偏积分微分问题中包含了无穷积分项, 给这个模型的数值计算带来了一定的困难[10](2004). 近年来 Guo and Wang[13,14] (2014)提出了两种求解非线性期权定价方程的方法, 尤其是针对于 Merton 跳扩散模型. Wang and Chen[15, 17](2017)使用间断Galerkin方法求解Merton跳模型, 并根据方程的特性设计了一个多重网格方法来求解代数系统.

本文在上述文献的基础上, 利用隐—显二阶变步长BDF方法直接求解Merton跳—扩散模型对应的偏积分微分方程.

1 方程空间离散

先引入期权定价中 Merton 跳—扩散模型对应的偏积分微分方程(PIDE):

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial \tau}-\dfrac{1}{2}\sigma^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-(r-\dfrac{1}{2}\sigma^2-\lambda\xi)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(r+\lambda)u-\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau,x+y)f(y)\mathrm{d}y=0,\\ u(0,x)=\begin{cases}(\mathrm{e}^x-K)^+,\text{看涨期权},\\(K-\mathrm{e}^x)^+,\text{看跌期权}.\end{cases}\end{cases}\tag{2}$$

其中 $\tau=T-t; u(\tau,x)=V(T-t,e^x)$; $x=\ln S$, 即为股票价格的对数; $y=\ln Y, \zeta=E(Y-1)$, $f(y)$ 为随机变量 $y=\ln Y$ 的概率密度函数, 这里的 $Y-1$ 是一个对冲函数, 且 $0<y<\infty$.

为了便于更直观地对方程(2)进行分析, 将空间微分积分算子分成两部分[16], 令

$$L^x[u]=L^{\mathrm{BS}}[u]+L^{\mathrm{jump}}[u],$$

其中

$$L^{\mathrm{BS}}[u]=-\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-(r-\frac{1}{2}\sigma^2-\lambda\xi)\frac{\partial u}{\partial x}+(r+\lambda)u,$$

$$L^{\mathrm{jump}}[u]=-\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau,x+y)f(y)\mathrm{d}y,\quad u(0,x)=\tilde{g}(x):=g(\mathrm{e}^x).$$

这样, 方程(2)可以改写为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial \tau}(\tau,x)+L^x[u](\tau,x)=0,\tau\in J=[0,T],\\ u(0,x)=\tilde{g}(x),x\in\mathbb{R}.\end{cases}\tag{3}$$

空间上, 引入步长为 h 的空间网格 Ω_h, 节点 $x_i=ih, i=0,1,\cdots,M$, 则有 $Mh=b$. 采用二阶中心有限差分逼近偏导数 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, 即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}\approx\dfrac{u(\tau,x_{i+1})-u(\tau,x_{i-1})}{2h},\\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\approx\dfrac{u(\tau,x_{i+1})-2u(\tau,x_i)+u(\tau,x_{i-1})}{h^2}.\end{cases}$$

记 $u_i=u(\tau,x_i)$, 则空间微分部分可以写为

$$L^{\mathrm{BS}}[u]=-\frac{1}{2}\sigma^2\cdot\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}-(r-\frac{1}{2}\sigma^2-\lambda\zeta)\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}+(r+\lambda)u_i.$$

将上述方程化简得

$$L^{\mathrm{BS}}[u]=[-\frac{\sigma^2}{2h^2}+\frac{1}{2h}(r-\frac{1}{2}\sigma^2-\lambda\zeta)]u_{i-1}+(r+\lambda+\frac{\sigma^2}{h^2})u_i-[\frac{\sigma^2}{2h}+\frac{1}{2h}(r-\frac{1}{2}\sigma^2-\lambda\zeta)]u_{i+1}.\tag{4}$$

令 $u=(u_1,u_2\cdots,u_{m-1})^T$, 则微分算子(4)可以写为

$$L^{\mathrm{BS}}[u]=Du+B.$$

这里, $B=(b_1,b_2\cdots,b_{m-1})^T$, 其中

$$b_1=[-\frac{\sigma^2}{2h^2}+\frac{1}{2h}(r-\frac{1}{2}\sigma^2-\lambda\zeta)]u_0,\quad b_{m-1}=-[\frac{\sigma^2}{2h^2}+\frac{1}{2h}(r-\frac{1}{2}\sigma^2-\lambda\zeta)]u_m.$$

系数矩阵 D 是一个三对角矩阵, 且对 $i=1, 2, \cdots, m-1$, 非对角线元素为

$$D_{i,i-1}=\frac{-\sigma^2+(r-\frac{1}{2}\sigma^2-\lambda\zeta)h}{2h^2}，D_{i,i+1}=\frac{-\sigma^2-(r-\frac{1}{2}\sigma^2-\lambda\zeta)h}{2h^2}，D_{i,i}=r+\lambda-D_{i,i-1}-D_{i,i+1}.$$

对于空间积分部分

$$L^{\text{jump}}[u]=-\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau,x+y)f(y)\mathrm{d}y, \tag{5}$$

令 $z=x+y$, 则

$$\int_R u(\tau,x+y)f(y)\mathrm{d}y=\int_R u(\tau,z)f(z-x)\mathrm{d}z.$$

将空间积分项的区域分成两个部分, 即 $\int_{\mathbb{R}}=\int_{\Omega}+\int_{\mathbb{R}\backslash\Omega}$,其中 $\Omega:=(x_a,x_b)$. 在空间 $\Omega:=(x_a,x_b)$ 上, 将区间等分为 m 份, 取节点 $x_a=x_0\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant x_m=x_b$, $h_i=x_i-x_{i-1}$.

利用复合梯形求积公式得

$$H(\tau,x_i)=\frac{h}{2}[f_{i,0}u_0+f_{i,m}u_m+2\sum_{j=1}^{m-1}f_{i,j}u_j]. \tag{6}$$

其中 $u_i=u(\tau,x_i), f_{ij}=f(x_j-x_i), H(\tau,x_i):=\int_{\Omega}u(\tau,z)f(z-x_i)\mathrm{d}z$.

在 $\mathbb{R}\backslash\Omega$ 上, 根据欧式看涨期权边界条件的特点, 积分项可以写为

$$\varepsilon_{\text{call}}(\tau,x)=\mathrm{e}^{x+\frac{\sigma_j^2}{2}}\Phi(\frac{x-x_b+\sigma_j^2}{\sigma_j})-K\mathrm{e}^{-r\tau}\Phi(\frac{x-x_b}{\sigma_j}), \tag{7}$$

其中 $\Phi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}\mathrm{e}^{\frac{-\eta^2}{2}}\mathrm{d}\eta$.

同理, 在 $\mathbb{R}\backslash\Omega$ 上, 根据欧式看跌期权边界条件的特点, 积分项可以写为

$$\varepsilon_{\text{put}}(\tau,x)=K\mathrm{e}^{-r\tau}\Phi(\frac{x_a-x}{\sigma_j}). \tag{8}$$

结合(6)、(7)两式, 在 $\mathbb{R}$ 上, 欧式看涨期权的积分项可离散为

$$L^{\text{jump}}[u]=-\lambda(\int_{-\infty}^{x_a}+\int_{x_a}^{x_b}+\int_{x_b}^{+\infty})u(\tau,x_i+y)f(y)\mathrm{d}y\approx$$

$$-\lambda\mathrm{e}^{x_i+\frac{\sigma_j^2}{2}}\Phi(\frac{x_i-x_b+\sigma_j^2}{\sigma_j})+\lambda K\mathrm{e}^{-r\tau}\Phi(\frac{x_i-x_b}{\sigma_j})-\frac{h\lambda}{2}[f_{i,0}u_0+f_{i,m}u_m+2\sum_{j=1}^{m-1}f_{i,j}u_j].$$

结合(6) 、(8)两式, 在 $\mathbb{R}$ 上, 欧式看跌期权的积分项可离散为

$$L^{\text{jump}}[u]=-\lambda(\int_{-\infty}^{x_a}+\int_{x_a}^{x_b}+\int_{x_b}^{+\infty})u(\tau,x_i+y)f(y)\mathrm{d}y\approx$$

$$-\lambda K\mathrm{e}^{-r\tau}\Phi(\frac{x_a-x_i}{\sigma_j})-\frac{h\lambda}{2}[f_{i,0}u_0+f_{i,m}u_m+2\sum_{j=1}^{m-1}f_{i,j}u_j].$$

令 $u=(u_1,u_2\cdots,u_{m-1})^T$, $p=(p_1,p_2\cdots,p_{m-1})^T$, 则积分算子(5)可以写为

$$L^{\text{jump}}[u]=D'u-P.$$

积分项系数矩阵可以表示为

$$D'=-h\lambda\begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \cdots & f_{1,m-2} & f_{1,m-1} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \cdots & f_{2,m-2} & f_{2,m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{m-2,1} & f_{m-2,2} & \cdots & f_{m-2,m-2} & f_{m-2,m-1} \\ f_{m-1,1} & f_{m-1,2} & \cdots & f_{m-1,m-2} & f_{m-1,m-1} \end{pmatrix},$$

其中 $f_{i,j}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j}\exp[-\frac{(x_j-x_i)}{2\sigma_j^2}],i,j=1,2,\cdots,m-1.$

P 是一个列向量, 且

$$p_1=\lambda\varepsilon(\tau,x_1)+\frac{h\lambda}{2}(f_{1,0}u_0+f_{1,m}u_m),$$

$$p_i=\lambda\varepsilon(\tau,x_i)+\frac{h\lambda}{2}(f_{i,0}u_0+f_{i,m}u_m),$$

$$p_{m-1}=\lambda\varepsilon(\tau,x_{m-1})+\frac{h\lambda}{2}(f_{m-1,0}u_0+f_{m-1,m}u_m).$$

u_0 和 u_m 由期权的边界条件逼近求得. 对欧式看涨期权有

$$u_0\approx 0,u_m\approx \mathrm{e}^{x_b}-K\mathrm{e}^{-r\tau};$$

对欧式看跌期权有

$$u_0\approx K\mathrm{e}^{-r\tau}-\mathrm{e}^{x},u_m\approx 0.$$

上述 $\varepsilon(\tau,x_i)$ 对看涨和看跌期权分别对应为 $\varepsilon_{\mathrm{call}}(\tau,x_i),\varepsilon_{\mathrm{put}}(\tau,x_i)$.

令 $L=D+D',F=-B+P$, 方程(3)经空间离散后得到

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial\tau}(\tau,x)+Lu(\tau)=F(\tau),\tau\in J=[0,T],\\ u(0,x)=\tilde{g}(x),\ x\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

2 方程时间离散

引理 定义时间步长 $k_n=t_n-t_{n-1},\ r_n=\frac{k_n}{k_{n-1}}$, 则时间上微分部分对应的二阶变步长 BDF 离散公式为

$$\frac{1}{k_n}[\frac{1+2r_n}{1+r_n}u(\tau_n)-(1+r_n)u(\tau_{n-1})+\frac{r_n^2}{1+r_n}u(\tau_{n-2})]=(1+r_n)f(\tau_{n-1},u(\tau_{n-1}))-r_nf(\tau_{n-2},u(\tau_{n-2})).$$

证明 因为

$$\frac{1+2r_n}{1+r_n}u(\tau_n)=(1+r_n)u(\tau_n)-\frac{r_n^2}{1+r_n}u(\tau_n),$$

$$u(\tau_n)=u(\tau_{n-1})+u'(\tau_{n-1})k_n+u''(\tau_{n-1})\frac{k_n^2}{2}+o(k_n^3),$$

$$u(\tau_n)=u(\tau_{n-2})+u'(\tau_{n-2})(k_{n-1}+k_n)+u''(\tau_{n-2})\frac{(k_{n-1}^2+k_n^2)}{2}+o(k_{n-1}+k_n)^3,$$

所以

$$\frac{1+2r_n}{1+r_n}u(\tau_n)=(1+r_n)[u(\tau_{n-1})+u'(\tau_{n-1})k_n+u''(\tau_{n-1})\frac{k_n^2}{2}+o(k_n^3)]-$$

$$\frac{r_n^2}{1+r_n}[u(\tau_{n-2})+u'(\tau_{n-2})(k_{n-1}+k_n)+u''(\tau_{n-2})\frac{(k_{n-1}+k_n)^2}{2}+o(k_{n-1}+k_n)^3]=$$

$$(1+r_n)u(\tau_{n-1})-\frac{r_n^2}{1+r_n}u(\tau_{n-2})+(1+r_n)u'(\tau_{n-1})k_n-\frac{r_n^2}{1+r_n}(k_{n-1}+k_n)u'(\tau_{n-2})+$$

$$(1+r_n)\frac{k_n^2}{2}u''(\tau_{n-1})-\frac{r_n^2}{1+r_n}\frac{(k_{n-1}+k_n)^2}{2}u''(\tau_{n-2})+(1+r_n)o(k_n)^3-\frac{r_n^2}{1+r_n}o(k_{n-1}+k_n)^3.$$

现在确定参数 α,β. 因为

$$\frac{1+2r_n}{1+r_n}u^*(\tau_n)=(1+r_n)u(\tau_{n-1})-\frac{r_n^2}{1+r_n}u(\tau_{n-2})+[\alpha f(\tau_{n-1},u(\tau_{n-1}))-\beta f(\tau_{n-2},u(\tau_{n-2}))]k_n,$$

$$f(\tau_{n-1},u(\tau_{n-1}))=u'(\tau_{n-1}),$$

所以

$$\frac{1+2r_n}{1+r_n}e(\tau_n)=\frac{1+2r_n}{1+r_n}[u(\tau_n)-u^*(\tau_n)]=$$

$$[(1+r_n)k_n-\alpha k_n]u'(\tau_{n-1})+[\beta k_n-\frac{r_n^{\,2}}{1+r_n}(k_{n-1}+k_n)]u'(\tau_{n-2})+$$

$$(1+r_n)\frac{k_n^2}{2}u''(\tau_{n-1})-\frac{r_n^{\,2}}{1+r_n}\frac{(k_{n-1}+k_n)^2}{2}u''(\tau_{n-2})+(1+r_n)o(k_n)^3-\frac{r_n^{\,2}}{1+r_n}o(k_{n-1}+k_n)^3.$$

要使其达到二阶精度, 应有

$$(1+r_n)k_n-\alpha k_n=0,\ \beta k_n-\frac{r_n^{\,2}}{1+r_n}(k_{n-1}+k_n)=0.$$

由此可知, $\alpha=1+r_n,\beta=r_n$. 于是

$$\frac{1+2r_n}{1+r_n}e(\tau_n)=\frac{1+2r_n}{1+r_n}[u(\tau_n)-u^*(\tau_n)]=$$

$$(1+r_n)\frac{k_n^2}{2}u''(\tau_{n-1})-\frac{r_n^{\,2}}{1+r_n}\frac{(k_{n-1}+k_n)^2}{2}u''(\tau_{n-2})+(1+r_n)o(k_n)^3-\frac{r_n^{\,2}}{1+r_n}o(k_{n-1}+k_n)^3.$$

因为

$$\frac{r_n^{\,2}}{1+r_n}\frac{(k_{n-1}+k_n)^2}{2}=\frac{r_n^{\,2}}{1+r_n}\frac{(k_{n-1}+r_nk_{n-1})^2}{2}=\frac{r_n^{\,2}}{1+r_n}\frac{k_{n-1}^2(1+r_n)^2}{2}=(1+r_n)\frac{k_n^2}{2},$$

所以

$$\frac{1+2r_n}{1+r_n}e(\tau_n)=\frac{1+2r_n}{1+r_n}[u(\tau_n)-u^*(\tau_n)]=(1+r_n)\frac{k_n^2k_{n-1}}{2}u'''(\tau_{n-1})+(1+r_n)o((k_n)^3)-\frac{r_n^{\,2}}{1+r_n}o((k_{n-1}+k_n)^3)=$$

$$\frac{r_n^{\,2}}{2(1+r_n)}k_{n-1}^3u'''(\xi)+(1+r_n)o((k_n)^3)-\frac{r_n^{\,2}}{1+r_n}o((k_{n-1}+k_n)^3)=\frac{r_n^{\,2}}{2(1+r_n)}o(k_{n-1}^3)+(1+r_n)o((k_n)^3)-\frac{r_n^{\,2}}{1+r_n}o((k_{n-1}+k_n)^3).$$

同理, $\frac{1+2r_n}{1+r_n}u(\tau_n)=(1+r_n)u(\tau_{n-1})-\frac{r_n^{\,2}}{1+r_n}u(\tau_{n-2})+f(\tau_n,u(\tau_n))k_n$ 也为二阶精度的. 故引理得证.

综上所述, 方程(3)经时间空间离散后得到

$$\frac{\frac{1+2r_n}{1+r_n}u(x_m,\tau_n)-(1+r_n)u(x_m,\tau_{n-1})+\frac{r_n^2}{1+r_n}u(x_m,\tau_{n-2})}{k_n}+L^*u(\tau)=0.$$

其中

$$L^*u(\tau)=L^{\mathrm{BS}}[u]^n+(1+r_n)L^{\mathrm{jump}}[u]^{n-1}-r_nL^{\mathrm{jump}}[u]^{n-2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}(\tau^n,x_m)=\frac{\frac{1+2r_n}{1+r_n}u(x_m,\tau_n)-(1+r_n)u(x_m,\tau_{n-1})+\frac{r_n^2}{1+r_n}u(x_m,\tau_{n-2})}{k_n}.$$

3 数值实验

为了说明该方法的有效性, 进行了欧式看涨和期权的数值实验. 在欧式看涨期权数值算例中将设置下列基准参数:

$$\sigma=0.15,r=0.05,T=0.25,K=100,\ \lambda=0.1,\sigma_J=0.5,S_{\max}=400.$$

在欧式看跌期权数值算例中将设置下列基准参数:

$$\sigma=0.2,r=0,T=0.25,K=100,\ \lambda=0.1,\sigma_J=0.45,S_{\max}=6.$$

具体的实验结果见表 1, 2.

表 1 二阶变步长 BDF 方法解非一致网格欧式看涨期权

N	M	S	Compute Value	Error	Order	Time (s)
25	128	90	0.528889604	0.00125158		0.37803
50	258	90	0.527815979	0.000177954	7.033165701	0.120286
100	512	90	0.527673151	3.51267E-05	5.066.58259	0.595874
200	1024	90	0.527646084	8.05937E-06	4.3584952	6.463674
400	2048	90	0.527639977	1.95199E-06	4.128796299	53.43201
800	4096	90	0.527638507	4.81829E-07	4.051208162	455.707518
25	128	100	4.352323614	0.038922075		0.037803
50	258	100	4.381683941	0.009561748	4.070602406	0.120286
100	512	100	4.388866217	0.002379472	4.018432147	0.595874
200	1024	100	4.390651622	0.000594067	4.005391716	6.463674
400	2048	100	4.391097238	0.000148451	4.001760488	53.43201
800	4096	100	4.391208582	3.71069E-05	4.000644041	455.707518
25	128	110	12.63468047	0.008725367		0.037803
50	258	110	12.64116189	0.002243942	3.888410295	0.120286
100	512	110	12.64284187	0.000563962	3.978885706	0.595874
200	1024	110	12.64326475	0.00014108	3.997460193	6.463674
400	2048	110	12.64337057	3.52641E-05	4.00067267	53.43201
800	4096	110	12.64339702	8.81468E-06	4.000611378	455.707518

表 2 二阶变步长 BDF 方法解非一致网格欧式看跌期权

N	M	S	Compute Value	Error	Order	Time (s)
25	128	90	9.28671311	0.001295		0.035163
50	258	90	9.285604041	0.000186	6.963808	0.098961
100	512	90	9.28545486	3.68E-05	5.055369	0.551959
200	1024	90	9.285426506	8.43E-06	4.362689	6.087729
400	2048	90	9.285420114	2.04E-06	4.133507	52.77531
800	4096	90	9.285418577	5.03E-07	4.054234	458.0948
25	128	100	3.110131076	0.038895		0.035163
50	258	100	3.139467991	0.009558	4.069438	0.098961
100	512	100	3.146646922	0.002379	4.017859	0.551959
200	1024	100	3.148431793	0.000594	4.005108	6.087729
400	2048	100	3.148877312	0.000148	4.00162	52.77531
800	4096	100	3.148988637	3.71E-05	4.000574	458.0948
25	128	110	1.392476578	0.008709		0.035163
50	258	110	1.398943103	0.002243	3.883264	0.098961
100	512	110	1.400621867	0.000564	3.976448	0.551959
200	1024	110	1.401044747	0.000141	3.996264	6.087729
400	2048	110	1.4011506	3.53E-05	4.000079	52.77531
800	4096	110	1.401177063	8.82E-06	4.000317	458.0948

由 Merton 跳—扩散模型的定价公式可计算出当时间 $t=0$ 时，欧式看涨期权分别在执行价格 $S=90,100,110$ 时的精确解为

$$V(0,90)=0.52763802476,\ V(0,100)=4.391245689202,\ V(0,110)=12.64340583395.$$

同理，由 Merton 跳—扩散模型的定价公式可计算出当时间 $t=0$ 时，欧式看跌期权分别在执行价格 $S=90,100,110$，的精确解为:

$$V(0,90)=9.285418074148, V(0,100)=3.149025738590, V(0,110)=1.401185882783.$$

表 1，2 分别给出了在非一致网格上欧式看涨和看跌期权分别在 $S=90,100,110$ 处期权的价值(Compute Value)、误差(Error)、和比率(R)，并给出了该方法在求解线性方程组的过程中花的时间(Time)，表中第一列 N 表示时间网格节点的个数，第二列 M 表示空间网格节点的个数.

本文以 Merton 提出的带有跳—扩散过程的偏积分微分方程为研究对象，进行了空间和时间离散. 空间上采用有限差分的方法去逼近微分算子，时间上为了减少工作量，积分上进行显式离散，微分算子用隐

(下转第 25 页)

参考文献

[1] 闫文涛. 城市地下物流系统节点选址研究[D]. 重庆: 重庆交通大学硕士学位论文, 2015.
[2] Marchau V, Walker W, Duin R V. *An adaptive approach to implementing innovative urban transport solutions*[J]. Transport Policy, 2008, 15(6): 405~412
[3] Wiegmans B W, Visser J, Konings R, et al. *Review of underground logistic systems in the Netherlands*: *An ex-post evaluation of barriers, enablers and spin-offs*[J]. European Transporttrasporti Europei, 2010, 45(45): 34~49
[4] 郭东军, 谢金容, 陈志龙, 等. 地下集装箱运输系统研究的深层动因及趋势[J]. 地下空间与工程学报, 2012, 08(2): 229~235
[5] Liu H. "*Transporting Freight Containers by Pneumatic Capsule Pipeline* (PCP): *Port Security and Other Issues*[J]. Dyn.contin.discrete Impuls.syst.ser.b Appl.algorithms, 2009, 3(2): 123~134
[6] Heijden M C V D, Harten A V, Ebben M J R, et al. *Using Simulation to Design an Automated Underground System for Transporting Freight Around Schiphol Airport*[J]. Interfaces, 2002, 32(4):1~19
[7] 孙会君, 高自友. 物流中心扩建规模设计的双层规划模型研究[J]. 管理工程学报, 2003, 17(4): 69~72
[8] 杨文浩. 城市交通问题与城市地下物流系统[J]. 物流工程与管理, 2009, 31(5): 14~16
[9] 孟祥定. 绿色交通视角下城市轨道交通网络规划决策方法及应用[D]. 湖南: 湖南大学博士学位论文, 2007
[10] 穆树录. 城市地下物流系统线路规划研究[D]. 河北: 石家庄铁道大学硕士学位论文, 2015

(上接第 6 页)

式离散, 进而详细地推导了隐—显二阶变步长 BDF 方法. 这样做的好处在于能够保证其稳定性的同时也提高其计算速度. 因为若采用全隐的方法则必须解一个具有满矩阵的线性代数方程系统, 工作量相当大, 同时全显的方法的稳定性也不好, 并且它的步长必须取得非常小, 这样也会增加计算量. 最后通过数值例子可以发现: 当网格成倍数加密时, 误差成 3~4 倍减小, 并且该方法在减小工作量的同时也能够达到二阶精度. 数值例子也验证了该方法的有效性.

参考文献

[1] Fisher Black, Myron Scholes. *The Pricing of Options and Corporate Liabilities* [J]. The Journal of Political Economy. 1973, 81 (6): 133~155
[2] 姜礼尚. 期权定价的数学模型和方法[M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2003: 74~109
[3] 姜礼尚. 金融衍生产品定价的数学模型与案例分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008: 28~78
[4] A.M.Matache,T.von Perersdorff,C.Schwab. *Fast deterministic pricing of options on Levy driven assets*[J]. Mathematical Modelling and Numerical Analusis, 2004, 38(1): 37~71
[5] Heston Steven L..*A closed solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options*[J]. Review of Financial Studies, 1993(6): 327
[6] 丁玉洁, 周圣武, 陈绍花. 股指期货套利与现货组合模型的构建[J]. 现代经济, 2008
[7] 杨志元. 期权定价理论的发展、应用及展望[J]. 石家庄经济学院学报, 2000, 23(1): 56~60
[8] Leland H.E..*Option pricing and replication with transaction costs*[J].Journal of Finance,1985(40):1283-1301-343
[9] X, L, Zhang. *Numerical analysis of American option pricing in a jump-diffusion model*[J]. Mathematics of Operations Research, 1997122(3): 668~690
[10] 韩 磊. 广义 Black-Scholes 方程的无条件保证算法[D]. 南京: 中国矿业大学硕士学位论文, 2005: 4~6
[11]John C.Hull,Alan White.*The pricing of options on assets with stochastic volatilities*[J]. Journal of Finance,1987(42): 281~300
[12] Bates D S,Crashes, *Options and international asser substitutability* [D]. Princeton: Dept of Economics, Princeton unit, 1988
[13] J.Q Guo, W.S Wang. *An unconditonally stable, positivity-preserving splitting scheme for nonlinear Black-Scholes equation with transaction costs* [C]. Sci. World J. 2014, 11. ID 525207
[14] J.Q Guo, W.S Wang. *On the numerical solution of nonlinear option pricing equation in illiquid markets*[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2014: 117~133
[15] W.S.Wang, Y.Z. Chen. *Fast numerical valuation of options with jump under Merton*'*s model* [J]. Journal of computational and Applied Mathematics, 2017: 19~92
[16] 陈迎姿, 王晚生. 非线性 Black-Scholes 期权定价模型的数值模拟[J]. 湖南理工学院学报.自然科学版, 2016, 29(1): 12~16
[17] Y.Z.Chen ,W.S.Wang, A.G.Xiao. *An efficient algorithm for options under Merton*'*s jump-diffusion model on nonuniform grids*[J]. Computational Economics, submitted