涉及两个四面体的棱长与体积的三类不等式

孙明保, 李 京, 张映辉, 张再云, 吴俊滔
(湖南理工学院 数学学院, 湖南 岳阳 414006)

摘 要: 给出了联系两个四面体的棱长与体积的三类不等式, 从而推广并改进了相关文献中的结果.

关键词: 四面体; 棱长; 体积; 不等式
中图分类号: O123.2 **文献标识码**: A **文章编号**: 1672-5298(2018)02-0001-05

Three Inequalities Associated with Edge Lengthes and Volumes of Two Tetrahedrons

SUN Mingbao, LI Jing, ZHANG Yinghui, ZHANG Zaiyun, WU Juntao
(School of Mathematics, Hunan Institute of Science and Technology, Yueyang 414006, China)

Abstract: In this paper, we give three kinds of inequalities associated with edge lengthes and volumes of two tetrahedrons, accordingly, they have generalized and improved the results in some related papers.

Key words: tetrahedron; edge length; volume; inequality

0 引言

设 a, b, c, Δ, a', b', c', Δ' 分别表示 ΔABC 与 $\Delta A'B'C'$ 的三边长与面积, 则有

$$H \equiv a'^2(b^2+c^2-a^2)+b'^2(c^2+a^2-b^2)+c'^2(a^2+b^2-c^2) \geqslant 16\Delta\Delta'. \tag{1}$$

等式成立当且仅当 $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

不等式(1)即著名的的 Pedoe 不等式[1~3], 它是第一个涉及两个三角形的不等式. 文[4]、[5]、[6] 、[8]先后将 Pedoe 不等式推广到了两个四面体的棱长与体积. 本文推广和改进了文[4]、[5]、[6] 、[8]中的主要结果, 得到涉及两个四面体的棱长与体积的三类不等式.

1 主要结果

为行文方便, 约定: a_i, V 与 $a_i', V'(i=1,2,\cdots,6)$ 分别为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 与 $A_1'A_2'A_3'A_4'$ 的棱长和体积, $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 顶点 A_i 处的三个面角, $\alpha_i', \beta_i', \gamma_i'$ 为 $A_1'A_2'A_3'A_4'$ 顶点 A_i' 处的三个面角 $(i=1,2,3,4)$, $\alpha,\beta\in(0,2)$, $r\in[2,3]$, 再记

$$H_r(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{6}a_i'^{\alpha}(\sum_{j=1}^{6}a_j^{\beta}-ra_i^{\beta}),\ P=\prod_{i=1}^{6}a_i,\ P'=\prod_{i=1}^{6}a_i',$$

$$M_i=\frac{\alpha_i+\beta_i+\gamma_i}{2},\ M_i'=\frac{\alpha_i'+\beta_i'+\gamma_i'}{2},$$

$$\phi=\prod_{i=1}^{4}\csc^{\frac{1}{48}}M_i,\ \phi'=\prod_{i=1}^{4}\csc^{\frac{1}{48}}M_i',\ \lambda=\frac{a_i'^{\alpha}+a_j'^{\alpha}+a_k'^{\alpha}}{a_i^{\beta}+a_j^{\beta}+a_k^{\beta}},\ \{i,j,k\}\subset\{1,2,\cdots,6\}.$$

易知 λ 共有 $C_6^3=20$ 个值, 依次记为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{20}$, 并记 $\lambda_{21}=(\frac{P'^{\alpha}}{P^{\beta}})^{\frac{1}{6}}$, $u=\min\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{21}\}$, $v=\max\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{21}\}$.

收稿日期: 2017-09-21
基金项目: 国家自然科学基金项目(11271118); 湖南省教育厅资助科研项目(11A043)
作者简介: 孙明保(1962−), 男, 湖南岳阳人, 教授. 主要研究方向: 几何分析与偏微分方程

本文的主要结论是

定理 1 对两个四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 与 $A_1'A_2'A_3'A_4'$，当 $\alpha,\beta\in(0,2)$，$r\in[2,3]$ 时，有

$$H_r(\alpha,\beta)\geqslant 3(6-\gamma)[72^{\frac{\beta}{3}}\cdot\phi^{\beta}\cdot(\frac{p'^{\alpha}}{p^{\beta}})^{\frac{1}{6}}\cdot V^{\frac{2\beta}{3}}+72^{\frac{\alpha}{3}}\cdot\phi'^{\alpha}\cdot(\frac{p^{\beta}}{p'^{\alpha}})^{\frac{1}{6}}\cdot V^{\frac{2\alpha}{3}}]. \tag{2}$$

等式成立当且仅当两个四面体均为正四面体.

定理 2 对两个四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 与 $A_1'A_2'A_3'A_4'$，当 $\alpha,\beta\in(0,2)$，$r\in[2,3]$ 时，有

$$H_{\gamma}(\alpha,\beta)\geqslant 3(6-r)[72^{\frac{\beta}{3}}\cdot\lambda\cdot(\phi\cdot\phi')^{\frac{\beta}{2}}\cdot V^{\frac{2\beta}{3}}+72^{\frac{\alpha}{3}}\cdot\lambda^{-1}\cdot(\phi\cdot\phi')^{\frac{\alpha}{2}}\cdot V'^{\frac{2\alpha}{3}}]. \tag{3}$$

等式成立当且仅当两个四面体均为正四面体.

定理 3 对两个四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 与四面体 $A_1'A_2'A_3'A_4'$，当 $\lambda\in[u,v]$, $r\in[2,3]$ 时,有

$$H_r(\alpha,\beta)\geqslant 3(6-r)[72^{\frac{\beta}{3}}\cdot\lambda\cdot(\phi\cdot\phi')^{\frac{\beta}{2}}\cdot V^{\frac{2\beta}{3}}+72^{\frac{\alpha}{3}}\cdot\lambda^{-1}\cdot(\phi\cdot\phi')^{\frac{\alpha}{2}}\cdot V'^{\frac{2\alpha}{3}}]. \tag{4}$$

等式成立当且仅当两个四面体均为正四面体.

2 几个引理

引理 1[7] 设 a,b,c,Δ 与 a',b',c',Δ' 分别表示 ΔABC 与 $\Delta A'B'C'$ 的三边长与面积，则

$$H\geqslant 8[(\frac{a'b'c'}{abc})^{\frac{2}{3}}\Delta^2+(\frac{abc}{a'b'c'})^{\frac{2}{3}}\Delta'^2]. \tag{5}$$

等式成立当且仅当 $\Delta ABC\sim\Delta A'B'C'$.

引理 2[9] 设 a,b,c,Δ 分别是 ΔABC 的三边长和面积，Δ_θ 表示 $a^\theta,b^\theta,c^\theta$ $(0<\theta\leqslant 1)$ 组成的三角形的面积，则有

$$\Delta_\theta\geqslant(\frac{\sqrt{3}}{4})^{1-\theta}\Delta^\theta. \tag{6}$$

等式成立当且仅当 $a=b=c$.

引理 3[10] 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 棱长为 a_i，体积为 V，则有

$$\prod_{i=1}^{6}a_i\geqslant 72\cdot V^2\cdot\prod_{i=1}^{4}\csc^{\frac{1}{4}}M_i. \tag{7}$$

等式成立当且仅当 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体.

引理 4[5] 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 各顶点所对面的面积为 S_1,S_2,S_3,S_4，则有

$$\prod_{i=1}^{4}S_i\geqslant\frac{3^{\frac{14}{3}}}{2^4}V^{\frac{8}{3}}\cdot\prod_{i=1}^{4}\csc^{\frac{1}{12}}M_i. \tag{8}$$

等式成立当且仅当 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体.

3 主要结果的证明

定理 1 的证明 设 a_i 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中的对棱为 b_i，面 Δ_k，Δ_k' 的三边长分别为 a_{k1},a_{k2},a_{k3} 与 $a_{k1}',a_{k2}',a_{k3}'(i=1,2,\cdots,6;k=1,2,3,4)$.在 ΔABC 与 $\Delta A'B'C'$ 中，由引理 1 及引理 2 可得

$$a'^{\alpha}(b^\beta+c^\beta-a^\beta)+b'^{\alpha}(c^\beta+a^\beta-b^\beta)+c'^{\alpha}(a^\beta+b^\beta-c^\beta)\geqslant$$

$$\frac{3}{2}[\frac{(a'b'c')^{\frac{\alpha}{3}}}{(abc)^{\frac{\beta}{3}}}(\frac{16}{3})^{\frac{\beta}{2}}\Delta^\beta+\frac{(abc)^{\frac{\beta}{3}}}{(a'b'c')^{\frac{\alpha}{3}}}(\frac{16}{3})^{\frac{\alpha}{2}}\Delta'^{\alpha}]. \tag{9}$$

现对四面体 $A_1A_2A_3A_4$, $A_1'A_2'A_3'A_4'$ 的三角形侧面 $S_k,S_k'(k=1,2,3,4)$ 应用不等式(9)，共得四个不等式，将其相加并凑项，得

$$\sum_{i=1}^{6} a_i'^{\alpha}(\sum_{j=1}^{6} a_j^{\beta} - r a_i^{\beta}) \geqslant \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{6}[(\frac{16}{3})^{\frac{\beta}{2}}\lambda_k S_k^{\beta} + (\frac{16}{3})^{\frac{\alpha}{2}}\lambda_k^{-1} S_k'^{\alpha}] + \sum_{i=1}^{6} a_i'^{\alpha} b_i^{\beta} + (3-r)\sum_{i=1}^{6} a_i'^{\alpha} a_i^{\beta}, \tag{10}$$

其中 $r \in [2,3]$, $\lambda_k = [\frac{(a_{k1}' a_{k2}' a_{k3}')^{\alpha}}{(a_{k1} a_{k2} a_{k3})^{\beta}}]^{\frac{1}{3}} (k = 1, 2, 3, 4)$.

利用算术–几何不等式及引理 3, 有

$$\sum_{i=1}^{6} a_i'^{\alpha} a_i^{\beta} \geqslant 6(p'^{\alpha} p^{\beta})^{\frac{1}{6}} = 6 \cdot (p'^{\alpha} p^{-\beta})^{\frac{1}{6}} p^{\frac{\beta}{3}} \geqslant$$

$$6(p'^{\alpha} p^{-\beta})^{\frac{1}{6}} \cdot (72 \cdot V^2 \cdot \prod_{i=1}^{4} \csc^{\frac{1}{4}} M_i)^{\frac{\beta}{3}} = 6 \cdot 72^{\frac{\beta}{3}} \cdot (p'^{\alpha} p^{-\beta})^{\frac{1}{6}} \cdot V^{\frac{2\beta}{3}} \cdot \prod_{i=1}^{4} \csc^{\frac{\beta}{12}} M_i. \tag{11}$$

同理

$$\sum_{i=1}^{6} a_i'^{\alpha} a_i^{\beta} \geqslant 6 \cdot 72^{\frac{\alpha}{3}} \cdot (p'^{-\alpha} p^{\beta})^{\frac{1}{6}} \cdot V'^{\frac{2\alpha}{3}} \cdot \prod_{i=1}^{4} \csc^{\frac{\alpha}{12}} M_i', \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{6} a_i'^{\alpha} b_i^{\beta} \geqslant 6 \cdot 72^{\frac{\beta}{3}} \cdot (p'^{\alpha} p^{-\beta})^{\frac{1}{6}} \cdot V^{\frac{2\beta}{3}} \cdot \prod_{i=1}^{4} \csc^{\frac{\beta}{12}} M_i, \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{6} a_i'^{\alpha} b_i^{\beta} \geqslant 6 \cdot 72^{\frac{\alpha}{3}} \cdot (p'^{-\alpha} p^{\beta})^{\frac{1}{6}} \cdot V'^{\frac{2\alpha}{3}} \cdot \prod_{i=1}^{4} \csc^{\frac{\alpha}{12}} M_i'. \tag{14}$$

注意到

$$(\prod_{k=1}^{4} \lambda_k)^{\frac{1}{4}} = (p'^{\alpha} p^{-\beta})^{\frac{1}{6}},$$

由算术–几何不等式及引理 4, 有

$$\frac{3}{2}(\frac{16}{3})^{\frac{\beta}{2}} \sum_{k=1}^{4} \lambda_k S_k^{\beta} \geqslant \frac{3}{2}(\frac{16}{3})^{\frac{\beta}{2}} \cdot 4(\prod_{k=1}^{4} \lambda_k S_k^{\beta})^{\frac{1}{4}} = 6(\frac{16}{3})^{\frac{\beta}{2}} (p'^{\alpha} p^{-\beta})^{\frac{1}{6}} (\prod_{k=1}^{4} S_k)^{\frac{\beta}{4}} \geqslant$$

$$6(\frac{16}{3})^{\frac{\beta}{2}} (p'^{\alpha} p^{-\beta})^{\frac{1}{6}} (\frac{3^{\frac{14}{3}}}{2^4} V^{\frac{8}{3}} \cdot \prod_{i=1}^{4} \csc^{\frac{1}{12}} M_i)^{\frac{\beta}{4}} = 6 \cdot 72^{\frac{\beta}{3}} \cdot \phi^{\beta} \cdot (p'^{\alpha} p^{-\beta})^{\frac{1}{6}} \cdot V^{\frac{2\beta}{3}}. \tag{15}$$

同理

$$\frac{3}{2}(\frac{16}{3})^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{k=1}^{4} \lambda_k^{-1} S_k'^{\alpha} \geqslant 6 \cdot 72^{\frac{\alpha}{3}} \cdot \phi'^{\alpha} \cdot (p'^{-\alpha} p^{\beta})^{\frac{1}{6}} \cdot V'^{\frac{2\alpha}{3}}. \tag{16}$$

由以上七式得

$$\sum_{i=1}^{6} a_i'^{\alpha}(\sum_{j=1}^{6} a_j^{\beta} - r a_i^{\beta}) \geqslant 3 \cdot [72^{\frac{\beta}{3}} \cdot V^{\frac{2\beta}{3}} \cdot (p'^{\alpha} p^{-\beta})^{\frac{1}{6}} \cdot \prod_{i=1}^{4} \csc^{\frac{\beta}{12}} M_i + 72^{\frac{\alpha}{3}} \cdot V'^{\frac{2\alpha}{3}} \cdot (p'^{-\alpha} p^{\beta})^{\frac{1}{6}} \cdot \prod_{i=1}^{4} \csc^{\frac{\alpha}{12}} M_i'] +$$

$$6 \cdot [72^{\frac{\beta}{3}} \cdot V^{\frac{2\beta}{3}} \cdot (p'^{\alpha} p^{-\beta})^{\frac{1}{6}} \cdot \prod_{i=1}^{4} \csc^{\frac{\beta}{48}} M_i + 72^{\frac{\alpha}{3}} \cdot V'^{\frac{2\alpha}{3}} \cdot (p'^{-\alpha} p^{\beta})^{\frac{1}{6}} \cdot \prod_{i=1}^{4} \csc^{\frac{\alpha}{48}} M_i'] +$$

$$3(3-\gamma) \cdot [72^{\frac{\alpha}{3}} \cdot V'^{\frac{2\alpha}{3}} \cdot (p'^{-\alpha} p^{\beta})^{\frac{1}{6}} \cdot \prod_{i=1}^{4} \csc^{\frac{\alpha}{12}} M_i' + 72^{\frac{\beta}{3}} \cdot V^{\frac{2\beta}{3}} \cdot (p'^{\alpha} p^{-\beta})^{\frac{1}{6}} \cdot \prod_{i=1}^{4} \csc^{\frac{\beta}{12}} M_i],$$

故

$$\sum_{i=1}^{6} a_i'^{\alpha}(\sum_{j=1}^{6} a_j^{\beta} - \gamma a_i^{\beta}) \geqslant$$

$$3(6-\gamma) \cdot \phi^{\beta} \cdot 72^{\frac{\beta}{3}} \cdot V^{\frac{2\beta}{3}} \cdot (p'^{\alpha} p^{-\beta})^{\frac{1}{6}} + 3(6-\gamma) \cdot \phi'^{\alpha} \cdot 72^{\frac{\alpha}{3}} \cdot V'^{\frac{2\alpha}{3}} \cdot (p'^{-\alpha} p^{\beta})^{\frac{1}{6}} \geqslant$$

$$3(6-\gamma)[\phi^{\beta} \cdot 72^{\frac{\beta}{3}} \cdot V^{\frac{2\beta}{3}} \cdot (\frac{p'^{\alpha}}{p^{\beta}})^{\frac{1}{6}} + \phi'^{\alpha} \cdot 72^{\frac{\alpha}{3}} \cdot V^{\frac{2\alpha}{3}} \cdot (\frac{p^{\beta}}{p'^{\alpha}})^{\frac{1}{6}}].$$

从而得不等式(2). 由引理及算术–几何不等式中等式成立的条件知, (2)式中等式成立当且仅当两个四面体均为正四面体.

定理2的证明 令$\alpha=\beta,\ a_i=a_i'\ (i=1,2,\cdots,6),\ V=V'$，由文[5]中定理10，则有

$$6(6-r)\cdot 72^{\frac{\alpha}{3}}\cdot(\phi\cdot\phi')^{\frac{\alpha}{2}}\cdot V'^{\frac{2\alpha}{3}}\leqslant(\sum a_i'^{\alpha})^2-r\sum a_i'^{2\alpha}, \tag{17}$$

$$6(6-r)\cdot 72^{\frac{\beta}{3}}\cdot(\phi\cdot\phi')^{\frac{\beta}{2}}\cdot V^{\frac{2\beta}{3}}\leqslant(\sum a_i^{\beta})^2-r\sum a_i^{2\beta}. \tag{18}$$

现记

$$\lambda=\frac{(a_i'^{\alpha}+a_j'^{\alpha}+a_k'^{\alpha})}{(a_i^{\beta}+a_j^{\beta}+a_k^{\beta})},\ D_n=\sqrt{\lambda}\,a_n^{\beta}-\sqrt{\lambda^{-1}}\,a_n'^{\alpha},$$

其中$n=1,2,\cdots,6$；$\{i,j,k,i',j',k'\}=\{1,2,\cdots,6\}$. 容易验证

$$D_i+D_j+D_k=0, \tag{19}$$

从而由 (17), (18), (19)及Cauchy不等式，得

$$2H_{\gamma}-6(6-r)[\lambda\cdot 72^{\frac{\beta}{3}}\cdot(\phi\cdot\phi')^{\frac{\beta}{2}}\cdot V^{\frac{2\beta}{3}}+\lambda^{-1}\cdot 72^{\frac{\alpha}{3}}\cdot(\phi\cdot\phi')^{\frac{\alpha}{2}}\cdot V'^{\frac{2\alpha}{3}}]\geqslant$$

$$2H_{\gamma}-\lambda[(\sum a_i^{\beta})^2-r\sum a_i^{2\beta}]-\lambda^{-1}[(\sum a_i'^{\alpha})^2-r\sum a_i'^{2\alpha}]=r\sum_{n=1}^{6}D_n^2-(\sum_{n=1}^{6}D_n)^2=$$

$$r(D_i^2+D_j^2+D_k^2+D_{i'}^2+D_{j'}^2+D_{k'}^2)-(D_{i'}+D_{j'}+D_{k'})^2\geqslant r(D_i^2+D_j^2+D_k^2)\geqslant 0.$$

不等式(3)得证. 由文[5]中的定理10及Cauchy不等式中等式成立的条件知，等式成立当且仅当两个四面体均为正四面体.

定理3的证明 由定理2可知,

$$H_{\gamma}\geqslant 3(6-r)[u\cdot 72^{\frac{\beta}{3}}\cdot(\phi\cdot\phi')^{\frac{\beta}{2}}\cdot V^{\frac{2\beta}{3}}+\frac{1}{u}\cdot 72^{\frac{\alpha}{3}}\cdot(\phi\cdot\phi')^{\frac{\alpha}{2}}\cdot V'^{\frac{2\alpha}{3}}], \tag{20}$$

$$H_{\gamma}\geqslant 3(6-r)[v\cdot 72^{\frac{\beta}{3}}\cdot(\phi\cdot\phi')^{\frac{\beta}{2}}\cdot V^{\frac{2\beta}{3}}+\frac{1}{v}\cdot 72^{\frac{\alpha}{3}}\cdot(\phi\cdot\phi')^{\frac{\alpha}{2}}\cdot V'^{\frac{2\alpha}{3}}]. \tag{21}$$

又因为$\lambda\in[u,v]$，所以存在$\theta\in[0,1]$，使得$\lambda=\theta u+(1-\theta)v$，$(20)\times\theta+(21)\times(1-\theta)$，得

$$H_{\gamma}\geqslant 3(6-\gamma)[\lambda\cdot 72^{\frac{\beta}{3}}\cdot(\phi\cdot\phi')^{\frac{\beta}{2}}\cdot V^{\frac{2\beta}{3}}+(\frac{\theta}{u}+\frac{1-\theta}{v})\cdot 72^{\frac{\alpha}{3}}\cdot(\phi\cdot\phi')^{\frac{\alpha}{2}}\cdot V'^{\frac{2\alpha}{3}}]. \tag{22}$$

因为

$$\lambda\cdot(\frac{\theta}{u}+\frac{1-\theta}{v})=[\theta u+(1-\theta)v](\frac{\theta}{u}+\frac{1-\theta}{v})=$$

$$\theta^2+(1-\theta)^2+\theta(1-\theta)(\frac{u}{v}+\frac{v}{u})\geqslant\theta^2+(1-\theta)^2+2\theta(1-\theta)=1,$$

所以

$$\frac{\theta}{u}+\frac{1-\theta}{v}\geqslant\frac{1}{\lambda}.$$

代入式(22)即得不等式(4)，从而定理3得证.

4 几个推论

由算术–几何不等式及定理1，可得

推论1 对四面体$A_1A_2A_3A_4$与四面体$A_1'A_2'A_3'A_4'$，在定理1相同的条件下，有

$$H_r(\alpha,\beta)\geqslant 6(6-\gamma)\cdot 72^{\frac{\alpha+\beta}{6}}\cdot(V^{\beta}V'^{\alpha})^{\frac{1}{3}}\cdot(\phi^{\beta}\phi'^{\alpha})^{\frac{1}{2}}. \tag{23}$$

等式成立当且仅当两个四面体均为正四面体.

不等式(23)是文[5]中的主要结果.

在式(23)中，取$\gamma=3$及$\gamma=2$，并注意到 $(\phi^{\beta}\phi'^{\alpha})^{\frac{1}{2}}\geqslant 1$，得到文[6]中的两个不等式

$$H_3(\alpha,\beta)\geqslant 18\cdot 72^{\frac{\alpha+\beta}{6}}\cdot(V^{\beta}V'^{\alpha})^{\frac{1}{3}},$$

$$H_2(\alpha,\beta)\geqslant 24\cdot 72^{\frac{\alpha+\beta}{6}}\cdot(V^{\beta}V'^{\alpha})^{\frac{1}{3}}.$$

因为$\phi^{\beta}\geqslant 1,\phi'^{\alpha}\geqslant 1$，由定理 1，有

推论 2 对四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 与四面体 $A_1'A_2'A_3'A_4'$，在定理 1 相同的条件下，有

$$H_{\gamma}(\alpha,\beta)\geqslant 3(6-\gamma)[72^{\frac{\beta}{3}}\cdot(\frac{p'^{\alpha}}{p^{\beta}})^{\frac{1}{6}}\cdot V^{\frac{2\beta}{3}}+72^{\frac{\alpha}{3}}\cdot(\frac{p^{\beta}}{p'^{\alpha}})^{\frac{1}{6}}\cdot V'^{\frac{2\alpha}{3}}].\tag{24}$$

等式成立当且仅当两个四面体均为正四面体.

在式(24)中，取$\gamma=3$及$\gamma=2$，得到文[4]中的两个不等式

$$H_3(\alpha,\beta)\geqslant 9[72^{\frac{\beta}{3}}\cdot(\frac{p'^{\alpha}}{p^{\beta}})^{\frac{1}{6}}\cdot V^{\frac{2\beta}{3}}+72^{\frac{\alpha}{3}}\cdot(\frac{p^{\beta}}{p'^{\alpha}})^{\frac{1}{6}}\cdot V'^{\frac{2\alpha}{3}}],$$

$$H_2(\alpha,\beta)\geqslant 12[72^{\frac{\beta}{3}}\cdot(\frac{p'^{\alpha}}{p^{\beta}})^{\frac{1}{6}}\cdot V^{\frac{2\beta}{3}}+72^{\frac{\alpha}{3}}\cdot(\frac{p^{\beta}}{p'^{\alpha}})^{\frac{1}{6}}\cdot V'^{\frac{2\alpha}{3}}].\tag{25}$$

(25)是文[8]的主要结果.

因为$(\phi\phi')^{\frac{\alpha}{2}}\geqslant 1,(\phi\phi')^{\frac{\beta}{2}}\geqslant 1$，由定理 2，有

推论 3 对四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 与四面体 $A_1'A_2'A_3'A_4'$，在定理 2 相同的条件下，有

$$H_{\gamma}(\alpha,\beta)\geqslant 3(6-r)(72^{\frac{\beta}{3}}\cdot\lambda\cdot V^{\frac{2\beta}{3}}+72^{\frac{\alpha}{3}}\cdot\lambda^{-1}\cdot V'^{\frac{2\alpha}{3}}).\tag{26}$$

等式成立当且仅当两个四面体均为正四面体.

在式(26)中，取$\gamma=3$及$\gamma=2$，得到文[4]中的两个不等式

$$H_3(\alpha,\beta)\geqslant 9(72^{\frac{\beta}{3}}\cdot\lambda\cdot V^{\frac{2\beta}{3}}+72^{\frac{\alpha}{3}}\cdot\lambda^{-1}\cdot V'^{\frac{2\alpha}{3}}),$$

$$H_2(\alpha,\beta)\geqslant 12(72^{\frac{\beta}{3}}\cdot\lambda\cdot V^{\frac{2\beta}{3}}+72^{\frac{\alpha}{3}}\cdot\lambda^{-1}\cdot V'^{\frac{2\alpha}{3}}).$$

因为$(\phi\phi')^{\frac{\alpha}{2}}\geqslant 1,(\phi\phi')^{\frac{\beta}{2}}\geqslant 1$，由定理 3，有

推论 4 对四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 与四面体 $A_1'A_2'A_3'A_4'$，在定理 3 相同的条件下，有

$$H_r(\alpha,\beta)\geqslant 3(6-r)(72^{\frac{\beta}{3}}\cdot\lambda\cdot V^{\frac{2\beta}{3}}+72^{\frac{\alpha}{3}}\cdot\lambda^{-1}\cdot V'^{\frac{2\alpha}{3}}).\tag{27}$$

等式成立当且仅当两个四面体均为正四面体.

在式(27)中，取$\gamma=3$及$\gamma=2$，得到文[4]中的两个不等式

$$H_3(\alpha,\beta)\geqslant 9(72^{\frac{\beta}{3}}\cdot\lambda\cdot V^{\frac{2\beta}{3}}+72^{\frac{\alpha}{3}}\cdot\lambda^{-1}\cdot V'^{\frac{2\alpha}{3}}),$$

$$H_2(\alpha,\beta)\geqslant 12(72^{\frac{\beta}{3}}\cdot\lambda\cdot V^{\frac{2\beta}{3}}+72^{\frac{\alpha}{3}}\cdot\lambda^{-1}\cdot V'^{\frac{2\alpha}{3}}).$$

从而本文的结论推广并改进了[4]、[5]、[6] 、[8]中的一些主要结果. 值得指出的是, 用类似的方法, 可将本文给出的涉及两个四面体的棱长与体积的三类不等式, 推广到两个 n 维单形. 我们将另文再叙.

参考文献

[1] D. Pedoe. *An in equality for triangles*[J]. Proc, Phil. Soc, 1943, 38 (4): 397~398

[2] Chia-Kuei Peng. *Sharpeming the Neuberg-Pedoe inequality*[J]. I. Crux, Math., 1984, 10: 68~69

[3] Oppenheim-A. *Inequalities involving elements of triangles, Quadrilaterals or tetrahedra*[J]. Univ Beograd Publ Elektroretehn Fak Ser Mat Fiz, 1974, 461(461-497): 256~263

[4] 唐立华, 冷岗松. Pedoe 不等式的空间推广和加强[J]. 数学竞赛(4), 长沙: 湖南教育出版社, 1994: 91~102

[5] 冷劲松. 四面体中著名不等式的统一和加强[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 1995, (2): 71~77

[6] 杨世国. 关于两个四面体的一类不等式[J]. 福建中学数学. 1990, (1)

[7] 陈荣华. 中学理科参考资料[J]. 1990, (3): 21~24

[8] 唐立华. 彭家贵—常庚哲不等式的推广[J]. 数学通报, 1992, (12)

[9] 马　援, 王　振. Pedoe 不等式的推广[J]. 数学通讯, 1987, (7)

[10] 冷岗松, 钟嘉明. 关于四面体的一个不等式的加强[J]. 中等数学, 1989, (4)