几个涉及一阶导函数的(α, m)-凸函数的积分不等式

时统业，徐建忠
(海军指挥学院，江苏 南京 211800)

摘　要: 建立与(α, m)-凸函数的 Hermite-Hadamard 型不等式有关的并且涉及一阶导函数的积分恒等式. 利用这个恒等式，在一阶导函数的绝对值是(α, m)-凸函数和一阶导函数的绝对值有界两种情况下，建立了一些积分不等式.

关键词: (α, m)-凸函数; Hermite-Hadamard 型不等式; 积分不等式
中图分类号: O178　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1672-5298(2018)03-0001-06

Integral Inequalities Involving First Derivatives for (α, m)-Convex Functions

SHI Tongye, XU Jianzhong
(PLA Naval Command College, Nanjing 211800, China)

Abstract: Integral identity related to Hermite-Hadamard type inequality for (α, m)-convex functions and involving first-order derivative functions is established. With the help of this identity, some integral inequalities are obtained when the absolute value of the first derivative is (α, m)-convex function or the absolute value of the first derivative is bounded.

Key words: (α, m)-convex function; Hermite-Hadamard type inequality; integral inequality

0 引言

文[1, 2]引入了m-凸函数的概念.

定义 1[1, 2]　设$f:[0,b]\to\mathbb{R}$，$m\in[0,1]$，若对任意$x,y\in[0,b]$，$t\in[0,1]$，有

$$f(tx+m(1-t)y)\leqslant tf(x)+m(1-t)f(y),$$

则称f为$[0,b]$上的m-凸函数.

文[3]将m-凸函数推广为(α,m)-凸函数.

定义 2[3]　设$f:[0,b]\to\mathbb{R}$，$\alpha\in(0,1]$，$m\in(0,1]$，若对任意$x,y\in[0,b]$，$t\in[0,1]$，有

$$f(tx+m(1-t)y)\leqslant t^{\alpha}f(x)+m(1-t^{\alpha})f(y),$$

则称f为$[0,b]$上的(α,m)-凸函数.

文[4]在二阶导数的绝对值的q次幂为m-凸函数的情况下，给出了函数f在区间$[a,b]$上的算术平均值与$\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$差值的估计. 文[5]在二阶导数的绝对值的q次幂为(α,m)-凸函数的情况下，给出了函数f在区间$[a,mb]$上的算术平均值与$\dfrac{f(a)+f(mb)}{2}$差值的估计. 文[6]在二阶导数的绝对值的q次幂为(α,m)-凸函数的情况下，给出了函数f在区间$[a,mb]$上的算术平均值与$f(\dfrac{a+mb}{2})$差值的估计. 文[7]在一阶导数的绝对值的q次幂为(α,m)-凸函数的情况下，给出了函数f在区间$[a,b]$上的算术平均值与f在任意点处函数值的差值的估计. 关于(α,m)-凸函数的其它结果还可参阅文[8~10].

设$0\leqslant\alpha\leqslant1$，$0<m\leqslant1$，$f$为$[0,+\infty)$上的$(\alpha,m)$-凸函数，$0\leqslant a<b$，则对于任意$x\in[a,b]$，有

$$f(\frac{m}{m+1}(a+b))=f(\frac{m}{m+1}x+m(1-\frac{m}{m+1})(a+b-x))\leqslant$$

收稿日期: 2018-01-04
作者简介: 时统业(1963−)，男，河北张家口人，硕士，副教授. 主要研究方向: 基础数学

$$(\frac{m}{m+1})^{\alpha} f(x)+m(1-(\frac{m}{m+1})^{\alpha}) f(a+b-x).$$

在上式中对 x 在 $[a,b]$ 上积分得

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{(m+1)^{\alpha}}{(1-m)m^{\alpha}+m(m+1)^{\alpha}} f(\frac{m}{m+1}(a+b)). \tag{1}$$

基于对 (α,m)-凸函数的 Hermite-Hadamard 型不等式(1)的考虑, 容易用分部积分法建立下面的引理.

引理 设 f 是 $[0,b]$ 上的可微函数, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, $0<m\leqslant 1$, $0<a<mb$, f' 在 $[a,b]$ 上可积, 则有

$$I=\frac{1}{b-a}[\int_a^{\gamma}(c-x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_{\gamma}^{b}(d-x)f'(x)\mathrm{d}x],$$

其中

$$I=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{(1+m)^{\alpha}}{(1-m)m^{\alpha}+m(1+m)^{\alpha}} f(\frac{m}{1+m}(a+b))+$$

$$\frac{(1-m)[(1+m)^{\alpha}-m^{\alpha}]}{(1-m)m^{\alpha}+m(1+m)^{\alpha}}\cdot\frac{f(a)+f(b)}{2},$$

$$\gamma=\frac{m}{1+m}(a+b),\ c=\frac{[(1-m)m^{\alpha}+(1+m)^{\alpha+1}]a+(1-m)[m^{\alpha}-(1+m)^{\alpha+1}]b}{2[(1-m)m^{\alpha}+m(1+m)^{\alpha}]},$$

$$d=\frac{(1-m)[m^{\alpha}-(1+m)^{\alpha+1}]a+[(1-m)m^{\alpha}+(1+m)^{\alpha+1}]b}{2[(1-m)m^{\alpha}+m(1+m)^{\alpha}]}.$$

本文利用该引理, 分别在一阶导数的绝对值为 (α,m)-凸函数、一阶导数的界为已知的情况下, 给出与式(1)有关的差值估计. 通篇假定 $a<b$. 往后的讨论中将继续沿用引理中的记号. 容易验证 $c\leqslant a$, $d\geqslant b$, $c+d=a+b$. 当 $m=1$ 时, I 即为 f 在区间 $[a,b]$ 上的算术平均值与 f 在区间 $[a,b]$ 中点处函数值的差值. 当 $\alpha=1$ 时, 将 I 的表达式记为 J, 亦即

$$J=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{1+m}{2m} f(\frac{m}{1+m}(a+b))+\frac{1-m}{2m}\cdot\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

1 主要结果

定理 1 设 f 是 $[0,+\infty)$ 上的可微函数, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, $0<m\leqslant 1$, $0\leqslant a\leqslant mb$, f' 在 $[a,b]$ 上可积. $0<\alpha_1\leqslant 1$, $0<m_1\leqslant 1$.

(i) 若 $|f'|$ 是 $[a,\frac{b}{m_1}]$ 上的 (α_1,m_1)-凸函数, 则有

$$|I|\leqslant\left(\frac{(2^{\alpha_1+1}-1)(b-a)}{2^{\alpha_1+1}(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)}+R_1\right)|f'(a)|+\left(\frac{(\alpha_1^2+3\alpha_1-2+2^{1-\alpha_1})(b-a)}{4(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)}+R_2\right)m_1|f'(\frac{b}{m_1})|. \tag{2}$$

(ii) 若 $|f'|$ 是 $[\min\{\frac{a}{m_1},b\},\max\{\frac{a}{m_1},b\}]$ 上的 (α_1,m_1)-凸函数, 则有

$$|I|\leqslant\left(\frac{(2^{\alpha_1+1}-1)(b-a)}{2^{\alpha_1+1}(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)}+R_1\right)m_1|f'(\frac{a}{m_1})|+\left(\frac{(\alpha_1^2+3\alpha_1-2+2^{1-\alpha_1})(b-a)}{4(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)}+R_2\right)|f'(b)|. \tag{3}$$

其中

$$R_1=\frac{(1-m)[(1+m)^{\alpha}-m^{\alpha}](b-a)}{2(\alpha_1+1)[(1-m)m^{\alpha}+m(1+m)^{\alpha}]}+\frac{1}{(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)(b-a)^{\alpha_1+1}}\times$$

$$\{\frac{(b-ma)^{\alpha_1+1}}{(1+m)^{\alpha_1+2}}[(\alpha_1+m+2)a+(\alpha_1+1)b]-\frac{(b-a)^{\alpha_1+1}}{2^{\alpha_1+2}}[(\alpha_1+3)a+(\alpha_1+1)b]\},$$

$$R_2=\frac{\alpha_1(1-m)[(1+m)^{\alpha}-m^{\alpha}](b-a)}{4(\alpha_1+1)[(1-m)m^{\alpha}+m(1+m)^{\alpha}]}+\frac{(1-m)^2(a+b)^2}{4(1+m)^2(b-a)}-\frac{1}{(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)(b-a)^{\alpha_1+1}}\times$$

$$\{\frac{(b-ma)^{\alpha_1+1}}{(1+m)^{\alpha_1+2}}[(\alpha_1+m+2)a+(\alpha_1+1)b]-\frac{(b-a)^{\alpha_1+1}}{2^{\alpha_1+2}}[(\alpha_1+3)a+(\alpha_1+1)b]\}.$$

证明　当 $0\leqslant a\leqslant mb$ 时, $a\leqslant\gamma<b$. 因 $|f'|$ 是 $[a,\frac{b}{m_1}]$ 上的 (α_1,m_1) -凸函数, 故对任意 $x\in[a,b]$, 有

$$|f'(x)|=|f'(\frac{b-x}{b-a}a+m_1\frac{x-a}{b-a}\cdot\frac{b}{m_1})|\leqslant(\frac{b-x}{b-a})^{\alpha_1}|f'(a)|+m_1[1-(\frac{b-x}{b-a})^{\alpha_1}]|f'(\frac{b}{m_1})|,\tag{4}$$

利用引理和式(4), 得

$$|I|\leqslant\frac{1}{b-a}[(I_1+I_2)|f'(a)|+m_1(I_3+I_4)|f'(\frac{b}{m_1})|],\tag{5}$$

其中

$$I_1=\frac{1}{(b-a)^{\alpha_1}}\int_a^{\gamma}(x-c)(b-x)^{\alpha_1}\mathrm{d}x,\ I_2=\frac{1}{(b-a)^{\alpha_1}}\int_{\gamma}^{b}(d-x)(b-x)^{\alpha_1}\mathrm{d}x,$$

$$I_3=\frac{1}{(b-a)^{\alpha_1}}\int_a^{\gamma}(x-c)[(b-a)^{\alpha_1}-(b-x)^{\alpha_1}]\mathrm{d}x,$$

$$I_4=\frac{1}{(b-a)^{\alpha_1}}\int_{\gamma}^{b}(d-x)[(b-a)^{\alpha_1}-(b-x)^{\alpha_1}]\mathrm{d}x.$$

利用定积分的性质可将 I_1 和 I_2 恒等变形为

$$I_1=\frac{1}{(b-a)^{\alpha_1}}[\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)(b-x)^{\alpha_1}\mathrm{d}x+(a-c)\int_a^{\frac{a+b}{2}}(b-x)^{\alpha_1}\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^{\gamma}(x-c)(b-x)^{\alpha_1}\mathrm{d}x],$$

$$I_2=\frac{1}{(b-a)^{\alpha_1}}[\int_{\frac{a+b}{2}}^{\gamma}(x-d)(b-x)^{\alpha_1}\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(b-x)^{\alpha_1+1}\mathrm{d}x+(d-b)\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(b-x)^{\alpha_1}\mathrm{d}x]=$$

$$\frac{1}{(b-a)^{\alpha_1}}[\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(b-x)^{\alpha_1+1}\mathrm{d}x+(a-c)\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(b-x)^{\alpha_1}\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^{\gamma}(x-d)(b-x)^{\alpha_1}\mathrm{d}x],$$

于是

$$I_1+I_2=\frac{1}{(b-a)^{\alpha_1}}[\frac{(2^{\alpha_1+1}-1)(b-a)^{\alpha_1+2}}{2^{\alpha_1+1}(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)}+(a-c)\int_a^b(b-x)^{\alpha_1}\mathrm{d}x+$$

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^{\gamma}(x-a-b)(b-x)^{\alpha_1}\mathrm{d}x]=\frac{(2^{\alpha_1+1}-1)(b-a)^2}{2^{\alpha_1+1}(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)}+\frac{(1-m)[(1+m)^{\alpha}-m^{\alpha}](b-a)^2}{2(\alpha_1+1)[(1-m)m^{\alpha}+m(1+m)^{\alpha}]}+$$

$$\frac{1}{(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)(b-a)^{\alpha_1}}\{\frac{(b-ma)^{\alpha_1+1}}{(1+m)^{\alpha_1+2}}[(\alpha_1+m+2)a+(\alpha_1+1)b]-$$

$$\frac{(b-a)^{\alpha_1+1}}{2^{\alpha_1+2}}[(\alpha_1+3)a+(\alpha_1+1)b]\},\tag{6}$$

$$I_3+I_4=\int_a^{\gamma}(x-a)\mathrm{d}x+\int_{\gamma}^{b}(b-x)\mathrm{d}x+(a-c)(b-a)-(I_1+I_2)=$$

$$\frac{\alpha_1{}^2+3\alpha_1-2+2^{1-\alpha_1}}{4(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)}(b-a)^2+\frac{\alpha_1(1-m)[(1+m)^{\alpha}-m^{\alpha}](b-a)^2}{4(\alpha_1+1)[(1-m)m^{\alpha}+m(1+m)^{\alpha}]}+\frac{(1-m)^2(a+b)^2}{4(1+m)^2}-$$

$$\frac{1}{(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)(b-a)^{\alpha_1}}\{\frac{(b-ma)^{\alpha_1+1}}{(1+m)^{\alpha_1+2}}[(\alpha_1+m+2)a+(\alpha_1+1)b]-$$

$$\frac{(b-a)^{\alpha_1+1}}{2^{\alpha_1+2}}[(\alpha_1+3)a+(\alpha_1+1)b]\}.\tag{7}$$

综合式(5)~(7), 式(2)得证. 类似可证式(3).

推论 1　设 f 是 $[0,+\infty)$ 上的可微函数, $0\leqslant\alpha\leqslant1$, $0<m\leqslant1$, $0\leqslant a\leqslant mb$, f' 在 $[a,b]$ 上可积, $0<m_1\leqslant1$.

(ⅰ) 若$|f'|$是$[a,\frac{b}{m_1}]$上的m_1-凸函数, 则有

$$|I|\leqslant(\frac{b-a}{8}+(1-m)Q_1)|f'(a)|+(\frac{b-a}{8}+(1-m)Q_2)m_1|f'(\frac{b}{m_1})|.$$

(ⅱ) 若$|f'|$是$[\min\{\frac{a}{m_1},b\},\max\{\frac{a}{m_1},b\}]$上的$m_1$-凸函数, 则有

$$|I|\leqslant(\frac{b-a}{8}+(1-m)Q_1)m_1|f'(\frac{a}{m_1})|+(\frac{b-a}{8}+(1-m)Q_2)|f'(b)|.$$

其中

$$Q_1=\frac{[(1+m)^\alpha-m^\alpha](b-a)}{4[(1-m)m^\alpha+m(1+m)^\alpha]}+\frac{(a+b)^2[(7+4m+m^2)b-(2+8m+2m^2)a]}{24(1+m)^3(b-a)^2},$$

$$Q_2=\frac{[(1+m)^\alpha-m^\alpha](b-a)}{4[(1-m)m^\alpha+m(1+m)^\alpha]}+\frac{(a+b)^2[(2+8m+2m^2)b-(7+4m+m^2)a]}{24(1+m)^3(b-a)^2}.$$

证明 在定理1中取$\alpha_1=1$即可.

注 在推论1中取$m=1$可得到文[11]中定理2.2关于函数f在区间$[a,b]$上的算术平均值与f在区间$[a,b]$中点处函数值的差值估计.

推论2 设f是$[0,+\infty)$上的可微函数, $0<m\leqslant1$, $0\leqslant a\leqslant mb$, f'在$[a,b]$上可积, $0<m_1\leqslant1$.

(ⅰ) 若$|f'|$是$[a,\frac{b}{m_1}]$上的m_1-凸函数, 则有

$$|J|\leqslant(\frac{b-a}{8}+(1-m)\tilde{Q}_1)|f'(a)|+(\frac{b-a}{8}+(1-m)\tilde{Q}_2)m_1|f'(\frac{b}{m_1})|.$$

(ⅱ) 若$|f'|$是$[\min\{\frac{a}{m_1},b\},\max\{\frac{a}{m_1},b\}]$上的$m_1$-凸函数, 则有

$$|J|\leqslant(\frac{b-a}{8}+(1-m)\tilde{Q}_1)m_1|f'(\frac{a}{m_1})|+(\frac{b-a}{8}+(1-m)\tilde{Q}_2)|f'(b)|.$$

其中

$$\tilde{Q}_1=\frac{b-a}{8m}+\frac{(a+b)^2[(7+4m+m^2)b-(2+8m+2m^2)a]}{24(1+m)^3(b-a)^2},$$

$$\tilde{Q}_2=\frac{b-a}{8m}+\frac{(a+b)^2[(2+8m+2m^2)b-(7+4m+m^2)a]}{24(1+m)^3(b-a)^2}.$$

证明 在推论1中取$\alpha=1$即可.

定理2 设f是$[0,+\infty)$上的可微函数, $0\leqslant\alpha\leqslant1$, $0<m\leqslant1$, $0\leqslant a<mb$, f'在$[a,b]$上可积, $0<\alpha_1\leqslant1$, $0<m_1\leqslant1$. 若$|f'|$是$[a,\max\{b,\frac{\gamma}{m_1}\}]$上的$(\alpha_1,m_1)$-凸函数, 则有

$$\begin{aligned}|I|\leqslant&(\frac{(mb-a)^2}{(1+m)^2(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)(b-a)}+(1-m)L_1)|f'(a)|+\\&(\frac{(b-ma)^2}{(1+m)^2(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)(b-a)}+(1-m)L_2)|f'(b)|+\\&[(\frac{1}{4}-\frac{2}{(1+m)^2(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)})(b-a)+(1-m)L_3]m_1|f'(\frac{\gamma}{m_1})|.\end{aligned}\tag{8}$$

其中

$$L_1=\frac{[(1+m)^\alpha-m^\alpha](mb-a)}{2(\alpha_1+1)[(1-m^2)m^\alpha+m(1+m)^{\alpha+1}]},\ L_2=\frac{[(1+m)^\alpha-m^\alpha](b-ma)}{2(\alpha_1+1)[(1-m^2)m^\alpha+m(1+m)^{\alpha+1}]},$$

$$L_3=\frac{(1-m)(a+b)^2}{4(1+m)^2(b-a)}+\frac{(1+m)(a^2+b^2)-4ab}{(1+m)^2(\alpha_1+1)(\alpha_2+2)(b-a)}+\frac{\alpha_1[(1+m)^\alpha-m^\alpha](b-a)}{2(\alpha_1+1)[(1-m)m^\alpha+m(1+m)^\alpha]}.$$

证明 对任意$x\in[a,\gamma]$, 有

$$|f'(x)|=|f'(\frac{\gamma-x}{\gamma-a}a+m_1\frac{x-a}{\gamma-a}\cdot\frac{\gamma}{m_1})|\leqslant(\frac{\gamma-x}{\gamma-a})^{\alpha_1}|f'(a)|+m_1[1-(\frac{\lambda-x}{\gamma-a})^{\alpha_1}]|f'(\frac{\gamma}{m_1})|. \tag{9}$$

对任意$x\in[\gamma,b]$, 有

$$|f'(x)|=|f'(\frac{x-\gamma}{b-\gamma}b+m_1\frac{b-x}{b-\gamma}\cdot\frac{\gamma}{m_1})|\leqslant(\frac{x-\gamma}{b-\gamma})^{\alpha_1}|f'(b)|+m_1[1-(\frac{x-\gamma}{b-\gamma})^{\alpha_1}]|f'(\frac{\gamma}{m_1})|. \tag{10}$$

利用引理和式(9)、式(10), 得

$$|I|\leqslant\frac{1}{b-a}(K_1|f'(a)|+K_2|f'(b)|+K_3m_1|f'(\frac{\gamma}{m_1})|), \tag{11}$$

其中

$$K_1=\frac{1}{(\gamma-a)^{\alpha_1}}\int_a^\gamma(x-c)(\gamma-x)^{\alpha_1}\mathrm{d}x, K_2=\frac{1}{(b-\gamma)^{\alpha_1}}\int_\gamma^b(d-x)(x-\gamma)^{\alpha_1}\mathrm{d}x,$$

$$K_3=\frac{1}{(\gamma-a)^{\alpha_1}}\int_a^\gamma(x-c)[(\gamma-a)^{\alpha_1}-(\gamma-x)^{\alpha_1}]\mathrm{d}x+\frac{1}{(b-\gamma)^{\alpha_1}}\int_\gamma^b(d-x)[(b-\gamma)^{\alpha_1}-(x-\gamma)^{\alpha_1}]\mathrm{d}x.$$

利用定积分对区间的可加性, 可得

$$K_1=\frac{1}{(\gamma-a)^{\alpha_1}}[\int_a^\gamma(x-a)(\gamma-x)^{\alpha_1}\mathrm{d}x+(a-c)\int_a^\gamma(\gamma-x)^{\alpha_1}\mathrm{d}x]=$$

$$\frac{mb-a}{(1+m)(\alpha_1+1)}\{\frac{mb-a}{(\alpha_1+2)(1+m)}+\frac{(1-m)[(1+m)^\alpha-m^\alpha](b-a)}{2[(1-m)m^\alpha+m(1+m)^\alpha]}\}. \tag{12}$$

类似可得

$$K_2=\frac{b-ma}{(1+m)(\alpha_1+1)}\{\frac{b-ma}{(\alpha_1+2)(1+m)}+\frac{(1-m)[(1+m)^\alpha-m^\alpha](b-a)}{2[(1-m)m^\alpha+m(1+m)^\alpha]}\}, \tag{13}$$

$$K_3=\int_a^\gamma(x-c)\mathrm{d}x+\int_\gamma^b(d-x)\mathrm{d}x-(K_1+K_2)=$$

$$\int_a^\gamma[(x-a)+(a-c)]\mathrm{d}x+\int_\gamma^b[(d-b)+(b-x)]\mathrm{d}x-(K_1+K_2)=$$

$$\frac{1}{2}(\gamma-a)^2+\frac{1}{2}(b-\gamma)^2+(a-c)(b-a)-(K_1+K_2)=$$

$$\frac{1}{2}[(\gamma-\frac{a+b}{2})+\frac{b-a}{2}]^2+\frac{1}{2}[(\gamma-\frac{a+b}{2})-\frac{b-a}{2}]^2+(a-c)(b-a)-(K_1+K_2)=$$

$$[\frac{1}{4}-\frac{2}{(1+m)^2(\alpha_1+1)(\alpha_2+2)}](b-a)^2+\frac{(1-m)^2(a+b)^2}{4(1+m)^2}+$$

$$\frac{(1-m^2)(a^2+b^2)-4(1-m)ab}{(1+m)^2(\alpha_1+1)(\alpha_2+2)}+\frac{\alpha_1(1-m)[(1+m)^\alpha-m^\alpha](b-a)^2}{2(\alpha_1+1)[(1-m)m^\alpha+m(1+m)^\alpha]}. \tag{14}$$

综合式(11)~(14), 式(8)得证.

推论 3 设f是$[0,+\infty)$上的可微函数, $0<a<b$, f'在$[a,b]$上可积, $0<\alpha_1\leqslant1$, $0<m_1\leqslant1$. 若$|f'|$是$[a,\max\{b,\frac{\gamma}{m_1}\}]$上的$(\alpha_1, m_1)$-凸函数, 则有

$$|\frac{1}{b-a}\int_a^bf(x)\mathrm{d}x-f(\frac{a+b}{2})|\leqslant$$

$$\frac{b-a}{4(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)}[|f'(a)|+\alpha_1(\alpha_1+3)m_1f(\frac{a+b}{2m_1})+|f'(b)|].$$

证明 在定理 2 中取$m=1$即可.

推论 4 设f是$[0,+\infty)$上的可微函数, $0<m\leqslant1$, $0\leqslant a<mb$, f'在$[a,b]$上可积, $0<\alpha_1\leqslant1$, $0<m_1\leqslant1$. 若$|f'|$是$[a,\max\{b,\frac{\gamma}{m_1}\}]$上的$(\alpha_1, m_1)$-凸函数, 则有

$$|J|\leqslant(\frac{(mb-a)^2}{(1+m)^2(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)(b-a)}+(1-m)L_1)|f'(a)|+$$
$$(\frac{(b-ma)^2}{(1+m)^2(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)(b-a)}+(1-m)L_2)|f'(b)|+$$
$$[(\frac{1}{4}-\frac{2}{(1+m)^2(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)})(b-a)+(1-m)L_3]m_1|f'(\frac{\gamma}{m_1})|,$$

其中

$$L_1=\frac{mb-a}{2m(1+m)(\alpha_1+1)},\ L_2=\frac{b-ma}{2m(1+m)(\alpha_1+1)},$$
$$L_3=\frac{(1-m)(a+b)^2}{4(1+m)^2(b-a)}+\frac{(1+m)(a^2+b^2)-4ab}{(1+m)^2(\alpha_1+1)(\alpha_2+2)(b-a)}+\frac{\alpha_1[(1+m)^\alpha-m^\alpha](b-a)}{4m(\alpha_1+1)}.$$

证明 在定理2中取$\alpha=1$即可.

定理3 设f是$[0,+\infty)$上的可微函数，$0\leqslant\alpha\leqslant1$，$0<m\leqslant1$，$0\leqslant a\leqslant mb$，$f'$在$[a,b]$上可积. 若存在常数$M_1, M_2$, 使得$M_1\leqslant f'\leqslant M_2$, 则有

$$|I-\frac{(1-m)(a+b)(M_1+M_2)}{4(1+m)^{1-\alpha}[(1-m)m^\alpha+m(1+m)^\alpha]}|\leqslant$$
$$\frac{(b-a)(M_2-M_1)}{8}\{1+\frac{(1-m)(a+b)}{b-a}[\frac{(1-m)(a+b)}{(1+m)^2(b-a)}+\frac{2(m^\alpha-(1+m)^\alpha)}{(1-m)m^\alpha+m(1+m)^\alpha}]\}. \tag{15}$$

证明 由引理, 有

$$M_2J_1+M_1J_2\leqslant I\leqslant M_1J_1+M_2J_2, \tag{16}$$

其中

$$J_1=\frac{1}{b-a}\int_a^\gamma(c-x)\mathrm{d}x,\ J_2=\frac{1}{b-a}\int_\gamma^b(d-x)\mathrm{d}x.$$

式(16)等价于

$$|I-\frac{1}{2}(M_1+M_2)(J_1+J_2)|\leqslant\frac{1}{2}(M_2-M_1)(J_2-J_1). \tag{17}$$

$$J_1+J_2=\frac{1}{2(b-a)}[(c-a)^2-(c-\gamma)^2+(d-\gamma)^2-(d-b)^2]=\frac{1}{2(b-a)}[(d-\gamma)^2-(c-\gamma)^2]=$$
$$\frac{1}{2(b-a)}(d-c)(a+b-2\gamma)=\frac{(1-m)(a+b)}{2(1+m)^{1-\alpha}[(1-m)m^\alpha+m(1+m)^\alpha]}, \tag{18}$$

$$J_2-J_1=\frac{1}{b-a}[\int_\gamma^{\frac{a+b}{2}}(d-x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b(d-b)\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b(b-x)\mathrm{d}x-\int_a^{\frac{a+b}{2}}(a-x)\mathrm{d}x-$$
$$\int_a^{\frac{a+b}{2}}(c-a)\mathrm{d}x-\int_{\frac{a+b}{2}}^\gamma(c-x)\mathrm{d}x]=\frac{1}{b-a}[\frac{(b-a)^2}{4}+(b-a)(a-c)+\int_\gamma^{\frac{a+b}{2}}(a+b-2x)\mathrm{d}x]=$$
$$\frac{b-a}{4}+\frac{(1-m)(a+b)}{4}[\frac{(1-m)(a+b)}{(1+m)^2(b-a)}+\frac{2(m^\alpha-(1+m)^\alpha)}{(1-m)m^\alpha+m(1+m)^\alpha}]. \tag{19}$$

综合式(17)~(19), 式(15)得证.

推论5 设f是$[0,+\infty)$上的可微函数，$0\leqslant\alpha\leqslant1$，$0\leqslant a<b$，$f'$在$[a,b]$上可积. 若存在常数$M_1, M_2$, 使得$M_1\leqslant f'\leqslant M_2$, 则有

$$|\frac{1}{b-a}\int_a^bf(x)\mathrm{d}x-f(\frac{a+b}{2})|\leqslant\frac{(b-a)(M_2-M_1)}{8}. \tag{20}$$

证明 在定理3中取$m=1$即可.

推论6 设f是$[0, +\infty)$上的可微函数，$0<m\leqslant1$，$0\leqslant a<mb$，f'在$[a,b]$上可积. 若存在常数M_1, M_2, 使得$M_1\leqslant f'\leqslant M_2$, 则有 (下转第35页)

4 结束语

针对样本类部分不均衡的昂贵多目标优化问题, 本文提出了一种基于 LLE 降维的 Pareto 优劣性预测方法. 该算法可以在降维的过程中, 把部分不均衡的类均衡地分布到降维后的空间中, 从而提高 Pareto 优劣性预测的正确率. 同时, 在降维的基础上进行 Pareto 优劣性预测, 降低了计算复杂度, 节省了大量的时间成本和财务成本.

参考文献

[1] Guo G, Li W, Yang B, et al. *Predicting Pareto Dominance in Multi-objective Optimization using Pattern Recognition*[C]. In: Proceedings of the 2nd International Conference on Intelligent System Design and Engineering Application. Sanya, China: IEEE Computer Society, 2012: 456~459

[2] Guo G, Yin C, Yan T, et al. *Binary Nearest Neighbor Classification of Predicting Pareto Dominance in Multiobjective Optimization*[J]. Lecture Notes in Computer Science, 2012, 7331(1): 537~545

[3] Guo G, Yin C, Yan T, et al. *Nearest Neighbor Classification of Pareto Dominance in Multi-objective Optimization*[C]. In: Proceedings of the 5th International Conference on Advanced Computational Intelligence. Nanjing, China: IEEE, 2012: 328~331

[4] 郭观七, 尹　呈, 曾文静, 等. 基于等价分量交叉相似性的 Pareto 支配性预测[J]. 自动化学报, 2014, 40(1): 33~40

[5] 陈志旺, 白　锌, 杨　七, 等. 区间多目标优化中决策空间约束、支配及同序解筛选策略[J]. 自动化学报, 2015, 41(12): 2115~2124

[6] Deb K, Thiele L, Laumanns M, Zitzler E. *Scalable Multi-objective Optimization Test Problems*[C]. In: Proceedings of the Congress on Evolutionary Computation (CEC). Piscataway: IEEE Service Center, 2002: 825~830

[7] Roweis S T, Saul L K. *Nonlinear Dimensionality Reduction by Locally Linear Embedding*[J]. Science, 2000, 290(5500): 2323~2326

[8] 李　勇, 陈贺新, 赵　刚, 等. 基于可变 k 近邻 LLE 数据降维的图像检索方法[J]. 吉林大学学报(工), 2008, 38(4): 946~949

[9] Buche D, Schraudolph N N, Koumoutsakos P. *Accelerating Evolutionary Algorithms with Gaussian Process Fitness Function Models*[J]. IEEE Transactions on Systems Man & Cybernetics Part C, 2005, 35(2): 183~194

(上接第 6 页)

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1+m}{2m}f\left(\frac{m}{1+m}(a+b)\right)+\frac{1-m}{2m}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{a+b}{2}\cdot\frac{M_1+M_2}{2}\right)\right|\leqslant$$
$$\frac{(b-a)(M_2-M_1)}{8}\left\{1+\frac{(1-m)(a+b)[(1+3m)a-(1+2m+2m^2)b]}{m(1+m)^2(b-a)^2}\right\}.$$

证明　在定理 3 中取 $\alpha=1$ 即可.

参考文献

[1] Toader G H. *Some generalizations of the convexity*[C]. Proceedings of the Colloquium on Approximation and Optimization, University of Cluj-Napoca, 1984: 329~338

[2] Dragomir S S, Toader G H. *Some inequalities for m-convex functions*[J]. Studia Univ. Babes-Bolyai, Math., 1993(38): 21~28

[3] Mihesan V G. *A generalization of the convexity*[C]. Seminar on Functional Equations, Approx. and Convex., Cluj-Napoca, 1993

[4] Özdemir M E, Avcı M, Set E. *On some inequalities of Hermite–Hadamard type via m-convexity*[J]. Applied Mathematics Letters, 2010, 23(9): 1065~1070

[5] Özdemir M E, Avci M, Kavurmaci H. *Hermite–Hadamard-type inequalities via (α, m)-convexity*[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2011, 61(9): 2614~2620

[6] 李玉娇, 杜廷松. 一类(*α*, *m*)-凸函数的 Hadamard 型不等式[J]. 上海大学学报(自然科学版), 2017, 23(4): 583~589

[7] 双　叶, 尹红萍. 关于(*α*, *m*)凸函数的几个积分不等式及其应用[J]. 湖北民族学院学报(自然科学版), 2017, 35(3): 292~296

[8] Wang S H, Xi B Y, Qi F. *On Hermite-Hadamard type inequalities for (α, m)-convex functions*[J]. Int. J. Open Problems Comput. Math, 2012, 5(4): 46~57

[9] Bakula M K, Pecaric J, Ribicic M. *Companion inequalities to Jensen's inequality for m-convex and (α, m)-convex functions*[J]. Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 2006, 7(5): 1~32

[10] Set E, Sardari M, Özdemir M E, et al. *On generalizations of the Hadamard inequality for (α, m)-convex functions*[J]. Kyungpook mathematical journal, 2012, 52(3): 307~317

[11] Bakula M K, Ozdemir M E, Pecaric J. *Hadamard type inequalities for m-convex and (α, m)-convex functions*[J]. J. Inequal. Pure Appl. Math, 2008, 9(4): article 96