

Hermite 配置法求解第一类 Volterra 积分方程

方春华, 李明亮, 田 维

(湖南理工学院 数学学院, 湖南 岳阳 414006)

摘 要: 针对瞬态声学散射问题中的第一类带 Bessel 核的 Volterra 积分方程, 通过将变形方程与原方程联立求解, 给出了 Hermite 配置方法. 该格式的特点是振荡性越强, 计算越精确. 数值实验验证了格式的高效性.

关键词: 瞬态声学散射; 第一类 Volterra 积分方程; Bessel 核; Hermite 配置法; 高效率

中图分类号: O241.82

文献标识码: A

文章编号: 1672-5298(2018)04-0007-04

Hermite Collocation Method for Volterra Integral Equation of the First Kind

FANG Chunhua, LI Mingliang, TIAN Wei

(College of Mathematics, Hunan Institute of Science and Technology, Yueyang 414006, China)

Abstract: For Volterra integral equation of the first kind with Bessel kernel of transient acoustic scattering problem, by combining transformed equation and primitive equation, Hermite collocation method is presented. The features of this method is that the higher the oscillation the more accurate the calculation. The high efficiency is verified by numerical experiment.

Key words: transient acoustic scattering problem; Volterra integral equation of the first kind; Bessel kernel; Hermite collocation method; high efficiency

0 引言

科学与工程计算中的许多问题最后都转化为带高振荡 Bessel 核的积分方程的求解, 如: 雷达、声呐、电磁散射问题, 等等. 针对二维平面区域中的瞬态声学散射问题中的单层势能积分方程

$$\int_{\Gamma} \frac{u(x', t - |x' - x|)}{|x' - x|} dx' = a(x, t), \quad \Gamma \times (0, T),$$

当 $t \leq 0$, $u \equiv 0$, $a \equiv 0$ 时, Davies 和 Duncan^[1]通过连续 Fourier 变换可将其转化为带 Bessel 核的第一类 Volterra 积分方程(VIEs):

$$2\pi \int_0^t \hat{u}(\omega, t - R) J_0(\omega R) dR = \hat{a}(\omega, t), \quad \omega > 0. \quad (1)$$

其中 $J_0(x)$ 表示第一类 0 阶 Bessel 函数.

Davies 和 Duncan 利用配置法求解方程(1)时, 积分采用梯形求积公式近似, 误差阶为 $O(h^2\omega^2)$. 当频率 ω 很大时, 步长 h 要很小才可能获得较高精度的数值结果, 这就使得进行数值逼近的成本增加. 对于高振荡情况不是很高效. Brunner^[2]等介绍了一种高阶精度时间步长方法来逼近方程(1)的解, 但同样有步长对频率的高依赖性这个特点.

究其原因, 求解带高振荡 Bessel 核的 VIEs 时, 需进行格式离散, 其中涉及到高振荡积分的计算, 上述方法采用的是传统的求积公式. 而传统的数值求积公式(Newton-Cotes 公式、Gauss 求积公式、Clenshaw-Curtis 求积公式, 等等)对于带高振荡核的积分不是高效的, 如图 1 所示. 图 1 中横轴表示节点数, 纵轴表示绝对误差.

收稿日期: 2018-09-11

基金项目: 国家自然科学基金项目(11701171); 湖南省教育厅科研项目(17B113)

作者简介: 方春华(1979-), 女, 湖南新化人, 博士, 副教授. 主要研究方向: 高振荡问题计算

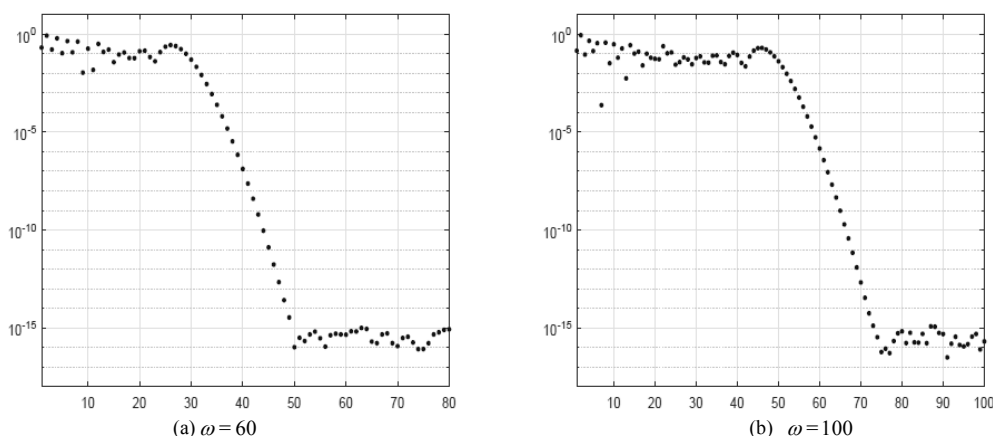


图 1 Gauss-Legendre 求积公式求解 $\int_0^1 \cos(x) J_0(\omega x) dx$ 结果

想要得到一定精度的结果, 振荡性越强, 所需选取的节点就越多. 所以高振荡积分的运算是数值求解这类问题的关键.

最近几十年, 高振荡积分计算发展得十分迅速, 如前面已提及的: Filon 方法、Filon 型方法、Levin 方法、Levin 型方法、渐近法、最速下降法、广义积分法则等等, 这些研究都为高振荡积分方程的求解提供了一定的思路. 针对带高振荡 Bessel 核的 VIEs, 王海永^[3]、向淑晃^[4]利用直接法进行了研究, 构造了频率越高精度越高的格式, 但其局限为若 Bessel 核为非 0 阶的函数, 解析解的形式不好给出. 对于带高振荡 Bessel 核的第二类 Volterra 积分方程, 文[5]进行了讨论, 给出了一个高效的 Filon 算法. 对于带高振荡 Bessel 核的第二类 Volterra 积分方程, 马俊杰^[6]等给出了频率越高精度越高的 Filon 方法, 并分析了其误差. Filon 配置法只用到起始点的函数值的信息, 而在函数逼近时, Hermite 插值除了用到节点处的函数值, 还用到了节点处的导数值, 信息量大. 基于此, 我们考虑高振荡 Volterra 积分方程

$$\int_0^x J_0(\omega(x-t))u(t)dt = f(x) \quad (2)$$

的 Hermite 配置法. 本文给出的算法将与文[6]中的算法进行比较.

1 格式构造

令 $I_N := \{x_i | 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N \leq 1\}$ 为区间 $[0, 1]$ 上的一组网格节点. 接下来计算在节点 $x_i (i=1, 2, \cdots, N)$ 上的函数值 $u(x_i)$ 的近似值 u_i^D .

利用 Filon 型方法计算高振荡积分时, 关于 ω 的收敛阶只与积分端点的匹配情况相关, 与中间点无关, 所以我们利用配置法求 Volterra 积分时, 配置点就选取节点.

对方程(2)两边分别求导可得

$$-J_0(0)u(x) - \int_0^x J_0(\omega(x-t))'u(t)dt = f'(x),$$

又 $J_0(0)=1, J_0'(x)=-\omega J_1(\omega(x-t))$, 于是

$$-J_0(0)u(x) + \omega \int_0^x J_1(\omega(x-t))u(t)dt = f'(x). \quad (3)$$

直接 Hermite 配置法:

在节点 x_0 与 x_j 上构造函数 $u(x)$ 的 3 次 Hermite 插值多项式, 并记为

$$u_h(t) = H_{0j}u(0) + H_{1j}u(x_j) + H_{2j}u'(0) + H_{3j}u'(x_j),$$

其中

$$H_{0j} = (1 + \frac{2t}{x_j}) (\frac{t-x_j}{x_j})^2, H_{1j} = (1 - 2\frac{t-x_j}{x_j}) (\frac{t}{x_j})^2,$$

$$H_{2j} = t(\frac{t-x_j}{x_j})^2, H_{3j} = (t-x_j)(\frac{t}{x_j})^2$$

表示节点 x_0 与 x_j 的插值基函数, 将 $f(x_j)$ 记为 f_j , u_j^D 表示函数值 $u(x_j)$ 的近似值, $u_j'^D$ 表示导数值 $u'(x_j)$ 的近似值, 将配置函数

$$u_h^D(t) = H_{0j}u_0 + H_{1j}u_j^D + H_{2j}u_0' + H_{3j}u_j'^D$$

代入方程(2)与方程(3)中, 得到求解配置点 x_j 上的配置解 u_j^D 、 $u_j'^D$ 的方程组:

$$\begin{cases} \int_0^{x_j} J_0(\omega(x_j-t)) (H_{0j}u_0 + H_{1j}u_j^D + H_{2j}u_0' + H_{3j}u_j'^D) dt = f_j, \\ u_j^D - \frac{\omega}{2} \int_0^{x_j} J_1(\omega(x_j-t)) (H_{0j}u_0 + H_{1j}u_j^D + H_{2j}u_0' + H_{3j}u_j'^D) dt = f_j'. \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} u_j^D = \frac{k_1 \omega I(3, j, 1) + k_2 I(3, j, 0)}{I(1, j, 0) \omega I(3, j, 1) + I(3, j, 0)(1 - \omega I(1, j, 1))}, \\ u_j'^D = \frac{k_1(1 - \omega I(1, j, 1)) - k_2 I(1, j, 0)}{I(3, j, 0)(1 - \omega I(1, j, 1)) + \omega I(3, j, 1) I(1, j, 0)}. \end{cases} \quad (4)$$

其中

$$k_1 = f_j - I(0, j, 0)u_0 - I(2, j, 0)u_0',$$

$$k_2 = f_j' + \omega I(0, j, 1)u_0 + \omega I(2, j, 1)u_0',$$

$$I(k, j, m) := \int_0^{x_j} H_{kj} J_m(\omega(x_j-t)) dt, k=0,1.$$

现在推导矩 $I(0, j, m)$ 的计算公式, 其它的类似处理.

$$I(0, j, m) = \int_0^{x_j} H_{0j} J_m(\omega(x_j-t)) dt = \int_0^{x_j} (1 + \frac{2t}{x_j}) (\frac{t-x_j}{x_j})^2 J_m(\omega(x_j-t)) dt =$$

$$\int_0^{x_j} (1 + \frac{2(x_j-u)}{x_j}) (\frac{u}{x_j})^2 J_m(\omega u) du = \int_0^{x_j} (3\frac{u^2}{x_j^2} - 2\frac{u^3}{x_j^3}) J_m(\omega(x_j-t)) dt =$$

$$\frac{3}{x_j^2} \int_0^{x_j} u^2 J_m(\omega u) du - \frac{2}{x_j^3} \int_0^{x_j} u^3 J_m(\omega u) du.$$

记 $L(\mu, m, \omega, a) := \int_0^a t^\mu J_m(\omega t) dt$, 可利用第二类 Lommel 函数有效计算(Gradshteyn & Ryzhik 1994, P.707, Watson, 1952, P.351)

$$L(\mu, m, \omega, a) = \frac{2^\mu \Gamma(\frac{m+\mu+1}{2})}{a^2 \omega^{\mu+1} \Gamma(\frac{m-\mu+1}{2})} + \frac{(m+\mu-1)J_m(\omega a)s_{\mu-1, m-1}^{(2)}(\omega a) - J_{m-1}(\omega a)s_{\mu, m}^{(2)}(\omega a)}{a\omega^\mu}, \quad (5)$$

$$s_{\mu, \nu}^{(2)}(x) = x^{\mu-1} [1 - \frac{(\mu-1)^2 - \nu^2}{x^2} + \frac{((\mu-1)^2 - \nu^2)((\mu-3)^2 - \nu^2)}{x^4} - \dots$$

$$+ (-1)^p \frac{((\mu-1)^2 - \nu^2) \cdots ((\mu-2p+1)^2 - \nu^2)}{x^{2p}}] + O(x^{\mu-2p-2}). \quad (6)$$

矩的计算公式为

$$\begin{cases} I(0, j, m) = \frac{3}{x_j^2} L(2, m, \omega, x_j) - \frac{2}{x_j^3} L(3, m, \omega, x_j), \\ I(1, j, m) = L(0, m, \omega, x_j) - \frac{3}{x_j^2} L(2, m, \omega, x_j) + \frac{2}{x_j^3} L(3, m, \omega, x_j), \\ I(2, j, m) = \frac{1}{x_j} L(2, m, \omega, x_j) - \frac{1}{x_j^2} L(3, m, \omega, x_j), \\ I(3, j, m) = -L(1, m, \omega, x_j) + \frac{2}{x_j} L(2, m, \omega, x_j) - \frac{1}{x_j^2} L(3, m, \omega, x_j). \end{cases} \quad (7)$$

2 算法

第一步, 利用式(5)和(6)计算出 $L(\mu, m, \omega, a) := \int_0^a t^\mu J_m(\omega t) dt$;

第二步, 利用式(7)计算出

$$I(k, j, m) := \int_0^{x_j} H_{kj} J_m(\omega(x_j - t)) dt, k = 0, 1, m = 0, 1;$$

第三步, 利用式(4)计算出节点 x_0 与 x_i ($i = 1, 2, \dots, N$) 处的函数值的近似值 u_i^D 与导数值的近似值 $u_i'^D$.

3 数值实例

考虑方程 $\int_0^x J_0(\omega(x-t))u(t)dt = f(x)$, 利用文[6]中的直接 Filon 方法与本文的直接 Hermite 配置方法计算其近似解, 其准确解为

$$u(x) = f'(x) + \omega \int_0^x \frac{J_1(\omega t)}{t} f(x-t) dt,$$

其中 $f(x) = xe^x$.

从图 2 中可以看出, 随着参数 ω 的增大, 两种方法的误差都越来越小, 但本文算法的误差比文[6]算法的误差更小. 本文算法还有一个优点, 即在计算函数的近似值的同时, 也可将函数导数的近似值算出.

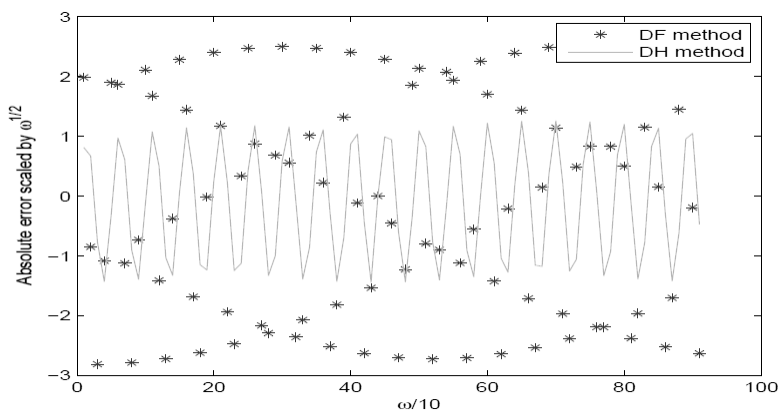


图 2 直接 Filon 方法 (DF)、直接 Hermite 配置方法(DH)的绝对误差乘以 $\omega^{\frac{1}{2}}$

参考文献

- [1] P. J. Davies and D. B. Duncan. *Stability and convergence of collocation schemes for retarded potential integral equations*[J]. SIAM J. Numer. Anal., 2004, 42: 1167~1188
- [2] Brunner H, Davies P J, Duncan D B. *Discontinuous Galerkin approximations for Volterra integral equations of the first kind* [J]. IMA Journal of Numerical Analysis, 2009, 29(4): 856~881
- [3] Wang, H. & Xiang, S. *Asymptotic expansion and Filon-type methods for a Volterra integral equation with a highly oscillatory kernel* [J]. IMA J. Numer. Anal, 2011, 31: 469~490
- [4] Xiang, S., Li, B. & Liu, G. *On efficient computation of highly oscillatory retarded potential integral equations* [J]. Int J. Comput. Math., 2018, 95(11): 2240~2245
- [5] Fang, C., Ma, J. & Xiang, M. *On Filon methods for a class of Volterra integral equations with highly oscillatory Bessel kernels* [J]. Appl. Math. Comput. 2015, 268: 783~792
- [6] Ma, J., Xiang, S. & Kang, H. *On the convergence rates of Filon methods for the solution of a Volterra integral equation with a highly oscillatory Bessel kernel* [J]. Appl. Math. Lett, 2013, 26: 699~705