局部分数阶积分下带有参数的 Ostrowski 型不等式

时统业[1]，曾志红[2]

(1. 海军指挥学院，江苏 南京 211800; 2. 广东第二师范学院 学报编辑部，广东 广州 510303)

摘 要：通过建立关于局部分数阶积分的恒等式，利用广义凸函数的定义和广义 Hölder 不等式，分别在 $|f^{(\alpha)}|$ 是广义凸函数和 $|f^{(\alpha)}|^q$ 是第二种意义下广义 s-凸函数的情况下，得到了一些 Ostrowski 型不等式.

关键词：局部分数阶积分; Ostrowski 型不等式; 广义凸函数; 第二种意义下的广义 s-凸函数; 广义 Hölder 不等式

中图分类号：O178 **文献标识码**：A **文章编号**：1672-5298(2019)02-0001-09

Ostrowski Type Inequalities with Parameter Via Local Fractional Integral

SHI Tongye[1], ZENG Zhihong[2]

(1.PLA Naval Command College, Nanjing 211800, China;
2. Editorial Department of Journal, Guangdong University of Education, Guangzhou 510303, China)

Abstract: By establishing an identity involving local fractional integral, using the definition of generalized convex functions and generalized Hölder inequality, some Ostrowski type inequalities were obtained in the case of $|f^{(\alpha)}|$ being generalized convex function and $|f^{(\alpha)}|^q$ being generalized s-convex function in the second sense, respectively.

Key words: local fractional integral; Ostrowski type inequality; generalized convex function; generalized s-convex function in the second sense; generalized Hölder's inequality

引言

设 f 是 $[a,b]$ 上的可微函数，且 $|f'|\leqslant M$，则有

$$|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t|\leqslant\left(\frac{1}{4}+\frac{(x-\frac{a+b}{2})^2}{(b-a)^2}\right)(b-a)M. \tag{1}$$

式(1)称为 Ostrowski 不等式[1]. 有关 Ostrowski 不等式的结果可见文[2~10].

近年来，分形理论在科学工程领域有非常广泛的应用. 文[11]系统阐述了建立在分形空间上的局部分数阶微积分的相关理论. 设 $\mathbb{R}^\alpha(0<\alpha\leqslant 1)$ 是分形实线的 α 型集合，$a^\alpha, b^\alpha, c^\alpha\in\mathbb{R}^\alpha$，则在这个分形集中有如下运算律:

1) $a^\alpha+b^\alpha\in\mathbb{R}^\alpha$，$a^\alpha b^\alpha\in\mathbb{R}^\alpha$;
2) $a^\alpha+b^\alpha=b^\alpha+a^\alpha=(a+b)^\alpha=(b+a)^\alpha$;
3) $a^\alpha+(b^\alpha+c^\alpha)=(a^\alpha+b^\alpha)+c^\alpha$;
4) $a^\alpha b^\alpha=b^\alpha a^\alpha=(ab)^\alpha=(ba)^\alpha$;
5) $a^\alpha(b^\alpha c^\alpha)=(a^\alpha b^\alpha)c^\alpha$;
6) $a^\alpha(b^\alpha+c^\alpha)=a^\alpha b^\alpha+a^\alpha c^\alpha$;
7) $a^\alpha+0^\alpha=0^\alpha+a^\alpha=a^\alpha$，$a^\alpha 1^\alpha=1^\alpha a^\alpha=a^\alpha$.

下面使用 Gao-Yang-Kang 的方法来描述局部分数阶导数和积分.

定义 1[11] 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^\alpha$ 是不可微函数，如果对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有

收稿日期: 2019-03-18
作者简介: 时统业(1963−)，男，河北张家口人，硕士，副教授. 主要研究方向: 数学不等式

$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon^\alpha$，则称 f 在点 x_0 处局部分数阶连续．若 f 在区间 $I\subseteq\mathbb{R}$ 上局部分数阶连续，则记 $f\in C_\alpha(I)$.

Gamma 函数由 $\Gamma(t)=\int_0^{+\infty}u^{t-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$ 定义.

定义 2[11] 设 $f\in C_\alpha(a,b)$，则 f 在点 x_0 处的局部分数阶导数定义为

$$f^{(\alpha)}(x)=\frac{\mathrm{d}^\alpha f(x)}{\mathrm{d}x^\alpha}\Big|_{x=x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\Gamma(1+\alpha)(f(x)-f(x_0))}{(x-x_0)^\alpha}.$$

若对任意 $x\in I\subseteq\mathbb{R}$ 时存在 $f^{(\alpha)}(x)$，则记 $f\in D_\alpha(I)$.

定义 3[11] 设 $f\in C_\alpha[a,b]$，则 f 在区间 $[a,b]$ 上的 α 阶局部分数阶积分定义为

$${}_aI_b^{(\alpha)}f(x)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b f(t)(\mathrm{d}t)^\alpha=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{j=0}^{N-1}f(t_j)(\Delta t_j)^\alpha,$$

其中 $a=t_0<t_1<\cdots<t_{N-1}<t_N=b$，$\Delta t_j=t_{j+1}-t_j$（$j=0,1,\cdots,N-1$），$\Delta t=\max\{\Delta t_1,\Delta t_2,\cdots,\Delta t_{N-1}\}$.

规定当 $a=b$ 时，${}_aI_b^{(\alpha)}f(x)=0$；当 $a>b$ 时，${}_aI_b^{(\alpha)}f(x)=-{}_bI_a^{(\alpha)}f(x)$．若对任意 $x\in[a,b]$ 存在 ${}_aI_x^{(\alpha)}f(t)$，则记 $f\in I_x^{(\alpha)}[a,b]$.

引理 1[11] (1) 设 $f(x)=g^{(\alpha)}(x)\in C_\alpha[a,b]$，则 ${}_aI_b^{(\alpha)}f(x)=g(b)-g(a)$.

(2) 设 $f,g\in D_\alpha[a,b]$ 且 $f^{(\alpha)}(x),g^{(\alpha)}(x)\in C_\alpha[a,b]$，则

$${}_aI_b^{(\alpha)}f(x)g^{(\alpha)}(x)=f(x)\,g(x)|_a^b-{}_aI_b^{(\alpha)}f^{(\alpha)}(x)g(x).$$

引理 2[11] 对任意 $k\in\mathbb{R}$，有

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha x^{k\alpha}}{\mathrm{d}x^\alpha}=\frac{\Gamma(1+k\alpha)}{\Gamma(1+(k-1)\alpha)}x^{(k-1)\alpha};$$

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b x^{k\alpha}(\mathrm{d}x)^\alpha=\frac{\Gamma(1+k\alpha)}{\Gamma(1+(k+1)\alpha)}(b^{(k+1)\alpha}-a^{(k+1)\alpha}).$$

文[12]引入分形集上广义凸函数的概念并建立了广义凸函数的 Hermite-Hadamard 型不等式.

定义 4[12] 设区间 $I\subseteq\mathbb{R}$，函数 $f:I\to\mathbb{R}^\alpha$，若对任意 $u,v\in I$ 和任意 $\lambda\in[0,1]$，有

$$f(\lambda u+(1-\lambda)v)\leqslant\lambda^\alpha f(u)+(1-\lambda)^\alpha f(v),$$

则称 f 是 I 上的广义凸函数.

定理 1[12] (广义凸函数的 Hermite-Hadamard 型不等式) 设 $f\in I_x^{(\alpha)}[a,b]$ 是 $[a,b]$ 上的广义凸函数，则有

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\leqslant\frac{\Gamma(1+\alpha)\,{}_aI_b^{(\alpha)}f(x)}{(b-a)^\alpha}\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2^\alpha}. \tag{2}$$

文[13]在 $|f^{(\alpha)}|^q$ 是广义凸函数的情况下，给出了式(2)生成差值的估计．文[14]也给出了 $|f^{(\alpha)}|^q$ 是广义凸函数的情况下式(2)右边生成差值的估计．作为广义凸函数的推广，文[15]提出了关于分形空间上广义 s- 凸函数的概念.

定义 5[15] 设 $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}^\alpha$，$0<s<1$，若对任意 $u,v\in[0,+\infty)$ 和任意 $\lambda_1,\lambda_2\geqslant 0$ 且 $\lambda_1^s+\lambda_2^s=1$，有

$$f(\lambda_1u+\lambda_2v)\leqslant\lambda_1^{s\alpha}f(u)+\lambda_2^{s\alpha}f(v),$$

则称 f 是 $[0,+\infty)$ 上第一种意义下的广义 s- 凸函数.

定义 6[15] 设 $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}^\alpha$，$0<s<1$，若对任意 $u,v\in[0,+\infty)$ 和任意 $\lambda_1,\lambda_2\geqslant 0$ 且 $\lambda_1+\lambda_2=1$，有

$$f(\lambda_1u+\lambda_2v)\leqslant\lambda_1^{s\alpha}f(u)+\lambda_2^{s\alpha}f(v),$$

则称 f 是 $[0,+\infty)$ 上第二种意义下的广义 s- 凸函数.

文[16]建立了分形空间上第二种意义下关于广义 s- 凸函数的 Hermite-Hadamard 型不等式.

定理 2[16] (广义 s- 凸函数的 Hermite-Hadamard 型不等式) 设 $0<s<1$，函数 $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}^\alpha$ 是第二种意义下的广义 s- 凸函数，$a,b\in[0,+\infty)$，$a<b$．若 $f\in C_\alpha[a,b]$，则有

$$\frac{2^{(s-1)\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}f(\frac{a+b}{2})\leqslant\frac{{}_aI_b^{(\alpha)}f(x)}{(b-a)^\alpha}\leqslant\frac{\Gamma(1+s\alpha)}{\Gamma(1+(s+1)\alpha)}(f(a)+f(b)).$$

文[17]在$|f^{(\alpha)}|^q$是第二种意义下的广义s-凸函数的情况下，给出了式(2)左边生成差值的估计. 本文旨在建立局部分数阶积分下的 Ostrowski 型不等式，在特殊情况下得到文[17]的结果.

引理 3　设区间$I\subseteq\mathbb{R}$，I°是I的内部，$f:I^\circ\to\mathbb{R}^\alpha$，$f\in D_\alpha(I^\circ)$，$a,b\in I^\circ$，$a<b$，$f^\alpha\in C_\alpha[a,b]$，则对于任意$x\in[a,\frac{a+b}{2}]$和任意常数$c$，有

$$\begin{aligned}&(b-a-c)^\alpha\frac{f(x)+f(a+b-x)}{2^\alpha}+c^\alpha f(\frac{a+b}{2})-\Gamma(1+\alpha)\,{}_aI_b^{(\alpha)}f(t)=\\&\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^x(t-a)^\alpha f^{(\alpha)}(t)(\mathrm{d}t)^\alpha+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_x^{\frac{a+b}{2}}(t+\frac{c-a-b}{2})^\alpha f^{(\alpha)}(t)(\mathrm{d}t)^\alpha+\\&\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{a+b}{2}}^{a+b-x}(t-\frac{c+a+b}{2})^\alpha f^{(\alpha)}(t)(\mathrm{d}t)^\alpha+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{a+b-x}^b(t-b)^\alpha f^{(\alpha)}(t)(\mathrm{d}t)^\alpha=\\&\frac{(b-a)^{2\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^{\frac{x-a}{b-a}}\lambda^\alpha f^{(\alpha)}((1-\lambda)a+\lambda b)(\mathrm{d}\lambda)^\alpha+\\&\frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{x-a}{b-a}}^{\frac12}((1-\lambda)a+\lambda b+\frac{c-a-b}{2})^\alpha f^{(\alpha)}((1-\lambda)a+\lambda b)(\mathrm{d}\lambda)^\alpha+\\&\frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac12}^{\frac{b-x}{b-a}}((1-\lambda)a+\lambda b-\frac{c+a+b}{2})^\alpha f^{(\alpha)}((1-\lambda)a+\lambda b)(\mathrm{d}\lambda)^\alpha-\\&\frac{(b-a)^{2\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1(1-\lambda)^\alpha f^{(\alpha)}((1-\lambda)a+\lambda b)(\mathrm{d}\lambda)^\alpha.\end{aligned}\tag{3}$$

证明　利用引理 1，有

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^x(t-a)^\alpha f^{(\alpha)}(t)(\mathrm{d}t)^\alpha=(x-a)^\alpha f(x)-\Gamma(1+\alpha)\,{}_aI_x^{(\alpha)}f(t),\tag{4}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_x^{\frac{a+b}{2}}(t+\frac{c-a-b}{2})^\alpha f^{(\alpha)}(t)(\mathrm{d}t)^\alpha=\\&(\frac{c}{2})^\alpha f(\frac{a+b}{2})-(x+\frac{c-a-b}{2})^\alpha f(x)-\Gamma(1+\alpha)\,{}_xI_{\frac{a+b}{2}}^{(\alpha)}f(t),\end{aligned}\tag{5}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{a+b}{2}}^{a+b-x}(t-\frac{c+a+b}{2})^\alpha f^{(\alpha)}(t)(\mathrm{d}t)^\alpha=\\&(\frac{a+b-c}{2}-x)^\alpha f(a+b-x)+(\frac{c}{2})^\alpha f(\frac{a+b}{2})-\Gamma(1+\alpha)\,{}_{\frac{a+b}{2}}I_{a+b-x}^{(\alpha)}f(t),\end{aligned}\tag{6}$$

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{a+b-x}^b(t-b)^\alpha f^{(\alpha)}(t)(\mathrm{d}t)^\alpha=(x-a)^\alpha f(a+b-x)-\Gamma(1+\alpha)\,{}_{a+b-x}I_b^{(\alpha)}f(t).\tag{7}$$

将式(4)~(7)相加，则式(3)得证.

引理 4　设$f:[a,b]\to\mathbb{R}^\alpha$是$[a,b]$上的广义凸函数，则对任意$u,v\in[a,b]$，且$u+v=a+b$，有

$$f(u)+f(v)\leqslant f(a)+f(b).$$

证明　利用广义凸函数定义易得.

引理 5[11] (广义 Hölder 不等式)　设$f,g\in C_\alpha[a,b]$，$p,q>1$，$\frac1p+\frac1q=1$，则

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^b|f(x)g(x)|(\mathrm{d}x)^\alpha\leqslant(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^b|f(x)|^p(\mathrm{d}x)^\alpha)^{\frac1p}(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^b|g(x)|^q(\mathrm{d}x)^\alpha)^{\frac1q}.$$

分形集上的 Beta 函数、不完全 Beta 函数和超几何函数分别定义为

$$B^\alpha(x,y)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1t^{(x-1)\alpha}(1-t)^{(y-1)\alpha}(\mathrm{d}t)^\alpha,\ x>0,y>0,$$

$$B_\lambda(x,y)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^\lambda t^{(x-1)\alpha}(1-t)^{(y-1)\alpha}(\mathrm{d}t)^\alpha\ (0<\lambda<1),\ x>0,\ y>0,$$

$$ {}_2F_1^{\alpha}(a,b;c;z)=\frac{1}{B^{\alpha}(b,c-b)}\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1 t^{(b-1)\alpha}(1-t)^{(c-b-1)\alpha}(1-zt)^{-a\alpha}(\mathrm{d}t)^{\alpha},\ c>b>0,\ |z|<1. $$

本文均假设 $p>1,\ q>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

主要结果

定理 3 设区间 $I\subseteq\mathbb{R}$，I° 是 I 的内部，$f:I^{\circ}\to\mathbb{R}^{\alpha}$，$a,b\in I^{\circ}$，$a<b$，$f\in D_{\alpha}[a,b]$，$f^{(\alpha)}\in C_{\alpha}[a,b]$，$|f^{(\alpha)}|$ 是 $[a,b]$ 上的广义凸函数，$a\leqslant x\leqslant\frac{a+b}{2}$，$0\leqslant c\leqslant a+b-2x$，则有

$$ |(b-a-c)^{\alpha}\frac{f(x)+f(a+b-x)}{2^{\alpha}}+c^{\alpha}f(\frac{a+b}{2})-\Gamma(1+\alpha)\,{}_aI_b^{(\alpha)}f(t)|\leqslant $$

$$ \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}((\frac{c}{2})^{2\alpha}+(\frac{a+b-c}{2}-x)^{2\alpha}+(x-a)^{2\alpha})(|f^{(\alpha)}(a)|+|f^{(\alpha)}(b)|). $$

证明 利用引理 3 和引理 4 得

$$ |(b-a-c)^{\alpha}\frac{f(x)+f(a+b-x)}{2^{\alpha}}+c^{\alpha}f(\frac{a+b}{2})-\Gamma(1+\alpha)\,{}_aI_b^{(\alpha)}f(t)|\leqslant $$

$$ \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^x(t-a)^{\alpha}|f^{(\alpha)}(t)|(\mathrm{d}t)^{\alpha}+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_x^{\frac{a+b}{2}}|t+\frac{c-a-b}{2}|^{\alpha}|f^{(\alpha)}(t)|(\mathrm{d}t)^{\alpha}+ $$

$$ \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{a+b}{2}}^{a+b-x}|t-\frac{c+a+b}{2}|^{\alpha}|f^{(\alpha)}(t)|(\mathrm{d}t)^{\alpha}+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{a+b-x}^{b}(b-t)^{\alpha}|f^{(\alpha)}(t)|(\mathrm{d}t)^{\alpha}= $$

$$ \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^x(t-a)^{\alpha}(|f^{(\alpha)}(t)|+|f^{(\alpha)}(a+b-t)|)(\mathrm{d}t)^{\alpha}+ $$

$$ \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_x^{\frac{a+b}{2}}|t+\frac{c-a-b}{2}|^{\alpha}(|f^{(\alpha)}(t)|+|f^{(\alpha)}(a+b-t)|)(\mathrm{d}t)^{\alpha}\leqslant $$

$$ (|f^{(\alpha)}(a)|+|f^{(\alpha)}(b)|)[\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^x(t-a)^{\alpha}(\mathrm{d}t)^{\alpha}+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_x^{\frac{a+b}{2}}|t+\frac{c-a-b}{2}|^{\alpha}(\mathrm{d}t)^{\alpha}]= $$

$$ \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}((\frac{c}{2})^{2\alpha}+(\frac{a+b-c}{2}-x)^{2\alpha}+(x-a)^{2\alpha})(|f^{(\alpha)}(a)|+|f^{(\alpha)}(b)|). $$

推论 1 设区间 $I\subseteq\mathbb{R}$，I° 是 I 的内部，$f:I^{\circ}\to\mathbb{R}^{\alpha}$，$a,b\in I^{\circ}$，$a<b$，$f\in D_{\alpha}[a,b]$，$f^{(\alpha)}\in C_{\alpha}[a,b]$，$|f^{(\alpha)}|$ 是 $[a,b]$ 上的凸函数，$a\leqslant x\leqslant\frac{a+b}{2}$，则有

$$ |\frac{f(x)+f(a+b-x)}{2^{\alpha}}-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\,{}_aI_b^{(\alpha)}f(t)|\leqslant $$

$$ \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^{\alpha}\Gamma(1+2\alpha)}((\frac{a+b}{2}-x)^{2\alpha}+(x-a)^{2\alpha})(|f^{(\alpha)}(a)|+|f^{(\alpha)}(b)|). $$

$$ |(x-a)^{\alpha}(f(x)+f(a+b-x))+(a+b-2x)^{\alpha}f(\frac{a+b}{2})-\Gamma(1+\alpha)\,{}_aI_b^{(\alpha)}f(t)|\leqslant $$

$$ \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}((\frac{a+b}{2}-x)^{2\alpha}+(x-a)^{2\alpha})(|f^{(\alpha)}(a)|+|f^{(\alpha)}(b)|). $$

推论 2 设 f 是 $[a,b]$ 上的可微函数，$a\leqslant x\leqslant\frac{a+b}{2}$，$0\leqslant c\leqslant a+b-2x$，若 $|f'|$ 是 $[a,b]$ 上的凸函数，则有

$$ |(b-a-c)\frac{f(x)+f(a+b-x)}{2}+cf(\frac{a+b}{2})-\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t|\leqslant $$

$$ [\frac{c^2}{4}+(\frac{a+b-c}{2}-x)^2+(x-a)^2]\frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{2}. $$

定理 4 设区间 $I\subseteq\mathbb{R}$，I° 是 I 的内部，$f:I^{\circ}\to\mathbb{R}^{\alpha}$，$a,b\in I^{\circ}$，$a<b$，$f\in D_{\alpha}[a,b]$，$f^{(\alpha)}\in C_{\alpha}[a,b]$，

对于某个固定的 $s\in(0,1)$，$|f^{(\alpha)}|^q$ 是 $[a,b]$ 上第二种意义下的广义 s- 凸函数，其中 $q>1$，$a\leqslant x\leqslant \frac{a+b}{2}$，$0\leqslant c\leqslant a+b-2x$，则有

$$
\begin{aligned}
&|(b-a-c)^{\alpha}\frac{f(x)+f(a+b-x)}{2^{\alpha}}+c^{\alpha}f(\frac{a+b}{2})-\Gamma(1+\alpha)_aI_b^{(\alpha)}f(t)|\leqslant\\
&(b-a)^{2\alpha}[\frac{\Gamma(1+p\alpha)}{\Gamma(1+(p+1)\alpha)}(\frac{x-a}{b-a})^{(p+1)\alpha}]^{\frac{1}{p}}(\frac{\Gamma(1+s\alpha)}{\Gamma(1+(s+1)\alpha)})^{\frac{1}{q}}\{[(1^{(s+1)\alpha}-(\frac{b-x}{b-a})^{(s+1)\alpha})|f^{(\alpha)}(a)|^q+\\
&(\frac{x-a}{b-a})^{(s+1)\alpha}|f^{(\alpha)}(b)|^q]^{\frac{1}{q}}+[(\frac{x-a}{b-a})^{(s+1)\alpha}|f^{(\alpha)}(a)|^q+(1^{(s+1)\alpha}-(\frac{b-x}{b-a})^{(s+1)\alpha})|f^{(\alpha)}(b)|^q]^{\frac{1}{q}}\}+\\
&(b-a)^{2\alpha}[\frac{\Gamma(1+p\alpha)}{\Gamma(1+(p+1)\alpha)}((\frac{c}{2(b-a)})^{(p+1)\alpha}+(\frac{a+b-c-2x}{2(b-a)})^{(p+1)\alpha})]^{\frac{1}{p}}(\frac{\Gamma(1+s\alpha)}{\Gamma(1+(s+1)\alpha)})^{\frac{1}{q}}\times\\
&\{[((\frac{b-x}{b-a})^{(s+1)\alpha}-(\frac{1}{2})^{(s+1)\alpha})|f^{(\alpha)}(a)|^q+((\frac{1}{2})^{(s+1)\alpha}-(\frac{x-a}{b-a})^{(s+1)\alpha})|f^{(\alpha)}(b)|^q]^{\frac{1}{q}}+\\
&[((\frac{1}{2})^{(s+1)\alpha}-(\frac{x-a}{b-a})^{(s+1)\alpha})|f^{(\alpha)}(a)|^q+((\frac{b-x}{b-a})^{(s+1)\alpha}-(\frac{1}{2})^{(s+1)\alpha})|f^{(\alpha)}(b)|^q]^{\frac{1}{q}}\}\leqslant(b-a)^{2\alpha}\times\\
&(\frac{\Gamma(1+s\alpha)}{\Gamma(1+(s+1)\alpha)})^{\frac{1}{q}}[\frac{2^{\alpha}\Gamma(1+p\alpha)}{\Gamma(1+(p+1)\alpha)}((\frac{c}{2(b-a)})^{(p+1)\alpha}+(\frac{a+b-c-2x}{2(b-a)})^{(p+1)\alpha}+(\frac{x-a}{b-a})^{(p+1)\alpha})]^{\frac{1}{p}}\times\\
&(|f^{(\alpha)}(a)|^q+|f^{(\alpha)}(b)|^q)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}\tag{8}
$$

证明　由引理 3 和广义 Hölder 不等式得

$$
\begin{aligned}
&|(b-a-c)^{\alpha}\frac{f(x)+f(a+b-x)}{2^{\alpha}}+c^{\alpha}f(\frac{a+b}{2})-\Gamma(1+\alpha)_aI_b^{(\alpha)}f(t)|\leqslant\\
&(b-a)^{2\alpha}(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^{\frac{x-a}{b-a}}\lambda^{\alpha p}(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha})^{\frac{1}{p}}(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^{\frac{x-a}{b-a}}|f^{(\alpha)}((1-\lambda)a+\lambda b)|^q(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha})^{\frac{1}{q}}+\\
&(b-a)^{\alpha}(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{x-a}{b-a}}^{\frac{1}{2}}|(1-\lambda)a+\lambda b+\frac{c-a-b}{2}|^{\alpha p}(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha})^{\frac{1}{p}}(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{x-a}{b-a}}^{\frac{1}{2}}|f^{(\alpha)}((1-\lambda)a+\lambda b)|^q(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha})^{\frac{1}{q}}+\\
&(b-a)^{\alpha}(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{b-x}{b-a}}|(1-\lambda)a+\lambda b-\frac{c+a+b}{2}|^{\alpha p}(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha})^{\frac{1}{p}}(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{b-x}{b-a}}|f^{(\alpha)}((1-\lambda)a+\lambda b)|^q(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha})^{\frac{1}{q}}+\\
&(b-a)^{2\alpha}(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1}(1-\lambda)^{\alpha p}(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha})^{\frac{1}{p}}(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1}|f^{(\alpha)}((1-\lambda)a+\lambda b)|^q(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha})^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}\tag{9}
$$

其中

$$
\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^{\frac{x-a}{b-a}}\lambda^{\alpha p}(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha}=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1}(1-\lambda)^{\alpha p}(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha}=\frac{\Gamma(1+p\alpha)}{\Gamma(1+(p+1)\alpha)}(\frac{x-a}{b-a})^{(p+1)\alpha},\tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{x-a}{b-a}}^{\frac{1}{2}}|(1-\lambda)a+\lambda b+\frac{c-a-b}{2}|^{\alpha p}(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha}=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{b-x}{b-a}}|(1-\lambda)a+\lambda b-\frac{c+a+b}{2}|^{\alpha p}(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha}=\\
&\frac{(b-a)^{\alpha p}\Gamma(1+p\alpha)}{\Gamma(1+(p+1)\alpha)}((\frac{c}{2(b-a)})^{(p+1)\alpha}+(\frac{a+b-c-2x}{2(b-a)})^{(p+1)\alpha}),
\end{aligned}\tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^{\frac{x-a}{b-a}}|f^{(\alpha)}((1-\lambda)a+\lambda b)|^q(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha}\leqslant\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^{\frac{x-a}{b-a}}((1-\lambda)^{s\alpha}|f^{(\alpha)}(a)|^q+\lambda^{s\alpha}|f^{(\alpha)}(b)|^q)(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha}=\\
&|f^{(\alpha)}(a)|^q\cdot\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1}\lambda^{s\alpha}(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha}+|f^{(\alpha)}(b)|^q\cdot\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^{\frac{x-a}{b-a}}\lambda^{s\alpha}(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha}=\\
&\frac{\Gamma(1+s\alpha)}{\Gamma(1+(s+1)\alpha)}(1^{(s+1)\alpha}-(\frac{b-x}{b-a})^{(s+1)\alpha})|f^{(\alpha)}(a)|^q+\frac{\Gamma(1+s\alpha)}{\Gamma(1+(s+1)\alpha)}(\frac{x-a}{b-a})^{(s+1)\alpha}|f^{(\alpha)}(b)|^q.
\end{aligned}\tag{12}
$$

类似可得

$$
\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1}|f^{(\alpha)}((1-\lambda)a+\lambda b)|^q(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha}\leqslant
$$

$$\frac{\Gamma(1+s\alpha)}{\Gamma(1+(s+1)\alpha)}(\frac{x-a}{b-a})^{(s+1)\alpha}|f^{(\alpha)}(a)|^q+\frac{\Gamma(1+s\alpha)}{\Gamma(1+(s+1)\alpha)}(1^{(s+1)\alpha}-(\frac{b-x}{b-a})^{(s+1)\alpha})|f^{(\alpha)}(b)|^q, \quad (13)$$

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{x-a}{b-a}}^{\frac{1}{2}}|f^{(\alpha)}((1-\lambda)a+\lambda b)|^q(\mathrm{d}\lambda)^\alpha\leqslant\frac{\Gamma(1+s\alpha)}{\Gamma(1+(s+1)\alpha)}((\frac{b-x}{b-a})^{(s+1)\alpha}-(\frac{1}{2})^{(s+1)\alpha})|f^{(\alpha)}(a)|^q+$$
$$\frac{\Gamma(1+s\alpha)}{\Gamma(1+(s+1)\alpha)}((\frac{1}{2})^{(s+1)\alpha}-(\frac{x-a}{b-a})^{(s+1)\alpha})|f^{(\alpha)}(b)|^q, \quad (14)$$

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{b-x}{b-a}}|f^{(\alpha)}((1-\lambda)a+\lambda b)|^q(\mathrm{d}\lambda)^\alpha\leqslant\frac{\Gamma(1+s\alpha)}{\Gamma(1+(s+1)\alpha)}((\frac{1}{2})^{(s+1)\alpha}-(\frac{x-a}{b-a})^{(s+1)\alpha})|f^{(\alpha)}(a)|^q+$$
$$\frac{\Gamma(1+s\alpha)}{\Gamma(1+(s+1)\alpha)}((\frac{b-x}{b-a})^{(s+1)\alpha}-(\frac{1}{2})^{(s+1)\alpha})|f^{(\alpha)}(b)|^q, \quad (15)$$

综合式(9)~(15), 则式(8)的第一个不等式得证. 利用 Hölder 不等式可得式(8)的第二个不等式.

推论 3 设区间 $I\subseteq\mathbb{R}$, I°是 I 的内部, $f:I^\circ\to\mathbb{R}^\alpha$, $a,b\in I^\circ$, $a<b$, $f\in D_\alpha[a,b]$, $f^{(\alpha)}\in C_\alpha[a,b]$, 对于某个固定的 $s\in(0,1)$, $|f^{(\alpha)}|^q$是 $[a,b]$上第二种意义下的广义 s-凸函数, 其中 $q>1$, 则有

$$|\frac{f(a)+f(b)}{2^\alpha}-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^\alpha}{}_aI_b^{(\alpha)}f(t)|\leqslant(b-a)^\alpha(\frac{\Gamma(1+p\alpha)}{2^{(p+1)\alpha}\Gamma(1+(p+1)\alpha)})^{\frac{1}{p}}(\frac{\Gamma(1+s\alpha)}{2^{(s+1)\alpha}\Gamma(1+(s+1)\alpha)})^{\frac{1}{q}}\times$$
$$[((2^{(s+1)\alpha}-1^{(s+1)\alpha})|f^{(\alpha)}(a)|^q+|f^{(\alpha)}(b)|^q)^{\frac{1}{q}}+(|f^{(\alpha)}(a)|^q+(2^{(s+1)\alpha}-1^{(s+1)\alpha})|f^{(\alpha)}(b)|^q)^{\frac{1}{q}}]\leqslant$$
$$(b-a)^\alpha(\frac{\Gamma(1+p\alpha)}{2^{p\alpha}\Gamma(1+(p+1)\alpha)})^{\frac{1}{p}}(\frac{\Gamma(1+s\alpha)}{\Gamma(1+(s+1)\alpha)})^{\frac{1}{q}}(|f^{(\alpha)}(a)|^q+|f^{(\alpha)}(b)|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

证明 在定理 4 中取 $x=a$, $c=0$ 即得.

推论 4 设区间 $I\subseteq\mathbb{R}$, I°是 I 的内部, $f:I^\circ\to\mathbb{R}^\alpha$, $a,b\in I^\circ$, $a<b$, $f\in D_\alpha[a,b]$, $f^{(\alpha)}\in C_\alpha[a,b]$, 对于某个固定的 $s\in(0,1)$, $|f^{(\alpha)}|^q$是 $[a,b]$上第二种意义下的广义 s-凸函数, 其中 $q>1$, 则有

$$|\frac{1}{2^\alpha}(\frac{f(a)+f(b)}{2^\alpha}+f(\frac{a+b}{2}))-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^\alpha}{}_aI_b^{(\alpha)}f(t)|\leqslant$$
$$(b-a)^\alpha(\frac{\Gamma(1+p\alpha)}{2^{(2p+1)\alpha}\Gamma(1+(p+1)\alpha)})^{\frac{1}{p}}(\frac{\Gamma(1+s\alpha)}{2^{(s+1)\alpha}\Gamma(1+(s+1)\alpha)})^{\frac{1}{q}}\times$$
$$[((2^{(s+1)\alpha}-1^{(s+1)\alpha})|f^{(\alpha)}(a)|^q+|f^{(\alpha)}(b)|^q)^{\frac{1}{q}}+(|f^{(\alpha)}(a)|^q+(2^{(s+1)\alpha}-1^{(s+1)\alpha})|f^{(\alpha)}(b)|^q)^{\frac{1}{q}}]\leqslant$$
$$(b-a)^\alpha(\frac{\Gamma(1+p\alpha)}{2^{2p\alpha}\Gamma(1+(p+1)\alpha)})^{\frac{1}{p}}(\frac{\Gamma(1+s\alpha)}{\Gamma(1+(s+1)\alpha)})^{\frac{1}{q}}(|f^{(\alpha)}(a)|^q+|f^{(\alpha)}(b)|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

证明 在定理 4 中取 $x=a$, $c=\frac{b-a}{2}$ 即得.

注 1 在定理 4 中取 $x=a$, $c=b-a$, 即可得到文[17]中的定理 2.1.

定理 5 设区间 $I\subseteq\mathbb{R}$, I°是 I 的内部, $f:I\to\mathbb{R}^\alpha$, $a,b\in I^\circ$, $a<b$, $f\in D_\alpha[a,b]$, $f^{(\alpha)}\in C_\alpha[a,b]$, 对于某个固定的 $s\in(0,1)$, $|f^{(\alpha)}|^q$是$[a,b]$上第二种意义下的广义 s-凸函数, 其中 $q>1$, $a\leqslant x\leqslant\frac{a+b}{2}$, $0\leqslant c\leqslant a+b-2x$, 则有

$$|(b-a-c)^\alpha\frac{f(x)+f(a+b-x)}{2^\alpha}+c^\alpha f(\frac{a+b}{2})-\Gamma(1+\alpha){}_aI_b^{(\alpha)}f(t)|\leqslant$$
$$(b-a)^{2\alpha}[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}(\frac{x-a}{b-a})^{2\alpha}]^{\frac{1}{p}}\{[B_{\frac{x-a}{b-a}}(2,s+1)|f^{(\alpha)}(a)|^q+\frac{\Gamma(1+(s+1)\alpha)}{\Gamma(1+(s+2)\alpha)}(\frac{x-a}{b-a})^{(s+2)\alpha}|f^{(\alpha)}(b)|^q]^{\frac{1}{q}}+$$
$$[\frac{\Gamma(1+(s+1)\alpha)}{\Gamma(1+(s+2)\alpha)}(\frac{x-a}{b-a})^{(s+2)\alpha}|f^{(\alpha)}(a)|^q+B_{\frac{x-a}{b-a}}(2,s+1)|f^{(\alpha)}(b)|^q]^{\frac{1}{q}}\}+$$
$$(b-a)^{2\alpha}(\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}((\frac{c}{2(b-a)})^{2\alpha}+(\frac{a+b-c-2x}{2(b-a)})^{2\alpha}))^{\frac{1}{p}}\times$$

$$[(P|f^{(\alpha)}(a)|^q+Q|f^{(\alpha)}(b)|^q)^{\frac{1}{q}}+(Q|f^{(\alpha)}(a)|^q+P|f^{(\alpha)}(b)|^q)^{\frac{1}{q}}],$$

其中

$$P=(\frac{a+b-c-2x}{2(b-a)})^{2\alpha}(\frac{b-x}{b-a})^{s\alpha}B^{\alpha}(1,2)\,{}_2F_1^{\alpha}(-s,1;3;\frac{a+b-c-2x}{2(b-x)})+$$
$$(\frac{b-a+c}{2(b-a)})^{s\alpha}(\frac{c}{2(b-a)})^{2\alpha}B^{\alpha}(2,1)\,{}_2F_1^{\alpha}(-s,2;3;\frac{c}{b-a+c}),$$
$$Q=(\frac{c}{2(b-a)})^{2\alpha}(\frac{1}{2})^{s\alpha}B^{\alpha}(1,2)\,{}_2F_1^{\alpha}(-s,1;3;\frac{c}{b-a})+$$
$$(\frac{a+b-c-2x}{2(b-a)})^{2\alpha}(\frac{b-a-c}{2(b-a)})^{s\alpha}B^{\alpha}(2,1)\,{}_2F_1^{\alpha}(-s,2;3;\frac{a+b-c-2x}{b-a-c}).\tag{16}$$

证明　由引理 3 和广义 Hölder 不等式得

$$|(b-a-c)^{\alpha}\frac{f(x)+f(a+b-x)}{2^{\alpha}}+c^{\alpha}f(\frac{a+b}{2})-\Gamma(1+\alpha)\,{}_aI_b^{(\alpha)}f(t)|\leqslant$$
$$(b-a)^{2\alpha}(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^{\frac{x-a}{b-a}}\lambda^{\alpha}(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha})^{\frac{1}{p}}(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^{\frac{x-a}{b-a}}\lambda^{\alpha}|f^{(\alpha)}((1-\lambda)a+\lambda b)|^q(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha})^{\frac{1}{q}}+$$
$$(b-a)^{\alpha}(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{x-a}{b-a}}^{\frac{1}{2}}|(1-\lambda)a+\lambda b+\frac{c-a-b}{2}|^{\alpha}(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha})^{\frac{1}{p}}\times$$
$$(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{x-a}{b-a}}^{\frac{1}{2}}|(1-\lambda)a+\lambda b+\frac{c-a-b}{2}|^{\alpha}|f^{(\alpha)}((1-\lambda)a+\lambda b)|^q(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha})^{\frac{1}{q}}+$$
$$(b-a)^{\alpha}(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{b-x}{b-a}}|(1-\lambda)a+\lambda b-\frac{c+a+b}{2}|^{\alpha}(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha})^{\frac{1}{p}}\times$$
$$(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{b-x}{b-a}}|(1-\lambda)a+\lambda b-\frac{c+a+b}{2}|^{\alpha}|f^{(\alpha)}((1-\lambda)a+\lambda b)|^q(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha})^{\frac{1}{q}}+$$
$$(b-a)^{2\alpha}(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1}(1-\lambda)^{\alpha}(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha})^{\frac{1}{p}}(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1}(1-\lambda)^{\alpha}|f^{(\alpha)}((1-\lambda)a+\lambda b)|^q(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha})^{\frac{1}{q}}.\tag{17}$$

其中

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^{\frac{x-a}{b-a}}\lambda^{\alpha}(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha}=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1}(1-\lambda)^{\alpha}(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha}=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}(\frac{x-a}{b-a})^{2\alpha},\tag{18}$$

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{x-a}{b-a}}^{\frac{1}{2}}|(1-\lambda)a+\lambda b+\frac{c-a-b}{2}|^{\alpha}(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha}=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{b-x}{b-a}}|(1-\lambda)a+\lambda b-\frac{c+a+b}{2}|^{\alpha}(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha}=$$
$$\frac{(b-a)^{\alpha}\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}((\frac{c}{2(b-a)})^{2\alpha}+(\frac{a+b-c-2x}{2(b-a)})^{2\alpha}),\tag{19}$$

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^{\frac{x-a}{b-a}}\lambda^{\alpha}|f^{(\alpha)}((1-\lambda)a+\lambda b)|^q(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha}\leqslant$$
$$|f^{(\alpha)}(a)|^q\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^{\frac{x-a}{b-a}}\lambda^{\alpha}(1-\lambda)^{s\alpha}(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha}+|f^{(\alpha)}(b)|^q\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^{\frac{x-a}{b-a}}\lambda^{(s+1)\alpha}(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha}=$$
$$B_{\frac{x-a}{b-a}}(2,s+1)|f^{(\alpha)}(a)|^q+\frac{\Gamma(1+(s+1)\alpha)}{\Gamma(1+(s+2)\alpha)}(\frac{x-a}{b-a})^{(s+2)\alpha}|f^{(\alpha)}(b)|^q,\tag{20}$$

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1}(1-\lambda)^{\alpha}|f^{(\alpha)}((1-\lambda)a+\lambda b)|^q(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha}\leqslant$$
$$|f^{(\alpha)}(a)|^q\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1}(1-\lambda)^{(s+1)\alpha}(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha}+|f^{(\alpha)}(b)|^q\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1}(1-\lambda)^{\alpha}\lambda^{s\alpha}(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha}=$$
$$\frac{\Gamma(1+(s+1)\alpha)}{\Gamma(1+(s+2)\alpha)}(\frac{x-a}{b-a})^{(s+2)\alpha}|f^{(\alpha)}(a)|^q+B_{\frac{x-a}{b-a}}(2,s+1)|f^{(\alpha)}(b)|^q,\tag{21}$$

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{x-a}{b-a}}^{\frac{1}{2}}|(1-\lambda)a+\lambda b+\frac{c-a-b}{2}|^{\alpha}|f^{(\alpha)}((1-\lambda)a+\lambda b)|^q(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha}\leqslant I_{11}|f^{(\alpha)}(a)|^q+I_{12}|f^{(\alpha)}(b)|^q,$$

这里

$$I_{11}=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{x-a}{b-a}}^{\frac{1}{2}}|(1-\lambda)a+\lambda b+\frac{c-a-b}{2}|^{\alpha}(1-\lambda)^{s\alpha}(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha},$$

$$I_{12}=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{x-a}{b-a}}^{\frac{1}{2}}|(1-\lambda)a+\lambda b+\frac{c-a-b}{2}|^{\alpha}\lambda^{s\alpha}(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha}.$$

令 $\lambda_0=\dfrac{b-a-c}{2(b-a)}$，则

$$I_{11}=\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{x-a}{b-a}}^{\lambda_0}(\lambda_0-\lambda)^{\alpha}(1-\lambda)^{s\alpha}(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha}+\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\lambda_0}^{\frac{1}{2}}(\lambda-\lambda_0)^{\alpha}(1-\lambda)^{s\alpha}(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha}=$$

$$(b-a)^{\alpha}(\lambda_0-\frac{x-a}{b-a})^{2\alpha}(\frac{b-x}{b-a})^{s\alpha}\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1(1-t)^{\alpha}(1-\frac{a+b-c-2x}{b-x}t)^{s\alpha}(\mathrm{d}t)^{\alpha}+$$

$$(b-a)^{\alpha}(\frac{1}{2}-\lambda_0)^{2\alpha}(1-\lambda_0)^{s\alpha}\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha}(1-\frac{c}{b-a+c}t)^{s\alpha}(\mathrm{d}t)^{\alpha}=P.$$

类似可得 $I_{12}=Q$，故有

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{x-a}{b-a}}^{\frac{1}{2}}|(1-\lambda)a+\lambda b+\frac{c-a-b}{2}|^{\alpha}|f^{(\alpha)}((1-\lambda)a+\lambda b)|^{q}(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha}\leqslant P|f^{(\alpha)}(a)|^{q}+Q|f^{(\alpha)}(b)|^{q}. \quad (22)$$

类似可得

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{b-x}{b-a}}|(1-\lambda)a+\lambda b-\frac{c+a+b}{2}|^{\alpha}|f^{(\alpha)}((1-\lambda)a+\lambda b)|^{q}(\mathrm{d}\lambda)^{\alpha}\leqslant Q|f^{(\alpha)}(a)|^{q}+P|f^{(\alpha)}(b)|^{q}. \quad (23)$$

综合式(17)~(23)，则式(16)得证.

注 2 在定理 5 中取 $x=\dfrac{a+b}{2}$，$c=0$，即可得到文[17]中的定理 2.2.

推论 5 设区间 $I\subseteq\mathbb{R}$，I° 是 I 的内部，$f:I\to\mathbb{R}^{\alpha}$，$a,b\in I^{\circ}$，$a<b$，$f\in D_{\alpha}[a,b]$，$f^{(\alpha)}\in C_{\alpha}[a,b]$，对于某个固定的 $s\in(0,1)$，$|f^{(\alpha)}|^{q}$ 是 $[a,b]$ 上第二种意义下的广义 s-凸函数，其中 $q>1$，则有

$$|\frac{f(a)+f(b)}{2^{\alpha}}-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}{}_aI_b^{(\alpha)}f(t)|\leqslant(\frac{b-a}{4^{\frac{1}{q}}})^{\alpha}(\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2^{2\alpha}\Gamma(1+2\alpha)})^{\frac{1}{p}}\times$$

$$\{[B^{\alpha}(1,2)\,{}_2F_1^{\alpha}(-s,1;3;\frac{1}{2})|f^{(\alpha)}(a)|^{q}+(\frac{1}{2})^{s\alpha}B^{\alpha}(2,s+1)|f^{(\alpha)}(b)|^{q}]^{\frac{1}{q}}+$$

$$[(\frac{1}{2})^{s\alpha}B^{\alpha}(2,s+1)|f^{(\alpha)}(a)|^{q}+B^{\alpha}(1,2)\,{}_2F_1^{\alpha}(-s,1;3;\frac{1}{2})|f^{(\alpha)}(b)|^{q}]^{\frac{1}{q}}\}.$$

证明 在定理 5 中取 $x=a$，$c=0$ 即得.

定理 6 设区间 $I\subseteq\mathbb{R}$，I° 是 I 的内部，$f:I^{\circ}\to\mathbb{R}^{\alpha}$，$a,b\in I^{\circ}$，$a<b$，$f\in D_{\alpha}[a,b]$，$f^{(\alpha)}\in C_{\alpha}[a,b]$，对于某个固定的 $s\in(0,1)$，$|f^{(\alpha)}|^{q}$ 是 $[a,b]$ 上第二种意义下的广义 s-凸函数，其中 $q>1$，$a\leqslant x\leqslant\dfrac{a+b}{2}$，$0\leqslant c\leqslant a+b-2x$，则有

$$|(b-a-c)^{\alpha}\frac{f(x)+f(a+b-x)}{2^{\alpha}}+c^{\alpha}f(\frac{a+b}{2})-\Gamma(1+\alpha)\,{}_aI_b^{(\alpha)}f(t)|\leqslant$$

$$(b-a)^{2\alpha}[\frac{\Gamma(1+p\alpha)}{\Gamma(1+(p+1)\alpha)}(\frac{x-a}{b-a})^{(p+1)\alpha}]^{\frac{1}{p}}[\frac{\Gamma(1+s\alpha)}{\Gamma(1+(s+1)\alpha)}(\frac{x-a}{b-a})^{\alpha}]^{\frac{1}{q}}\times$$

$$[(|f^{(\alpha)}(a)|^{q}+|f^{(\alpha)}(x)|^{q})^{\frac{1}{q}}+(|f^{(\alpha)}(a+b-x)|^{q}+|f^{(\alpha)}(b)|^{q})^{\frac{1}{q}}]+(b-a)^{2\alpha}\times$$

$$[\frac{\Gamma(1+p\alpha)}{\Gamma(1+(p+1)\alpha)}((\frac{a+b-c-2x}{2(b-a)})^{(p+1)\alpha}+(\frac{c}{2(b-a)})^{(p+1)\alpha})]^{\frac{1}{p}}[\frac{\Gamma(1+s\alpha)}{\Gamma(1+(s+1)\alpha)}(\frac{a+b-2x}{2(b-a)})^{\alpha}]^{\frac{1}{q}}\times$$

$$[(|f^{(\alpha)}(\frac{a+b}{2})|^{q}+|f^{(\alpha)}(x)|^{q})^{\frac{1}{q}}+(|f^{(\alpha)}(a+b-x)|^{q}+|f^{(\alpha)}(\frac{a+b}{2})|^{q})^{\frac{1}{q}}]. \quad (24)$$

证明 由引理 3 和广义 Hölder 不等式有式(9)成立. 利用第二种意义下的广义 s-凸函数的 Hermite-

Hadamard 型不等式，得

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^{\frac{x-a}{b-a}}|f^{(\alpha)}((1-\lambda)a+\lambda b)|^q(\mathrm{d}\lambda)^\alpha\leqslant(\frac{x-a}{b-a})^\alpha\frac{\Gamma(1+s\alpha)}{\Gamma(1+(s+1)\alpha)}(|f^{(\alpha)}(a)|^q+|f^{(\alpha)}(x)|^q),\tag{25}$$

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{x-a}{b-a}}^{\frac{1}{2}}|f^{(\alpha)}((1-\lambda)a+\lambda b)|^q(\mathrm{d}\lambda)^\alpha\leqslant(\frac{a+b-2x}{2(b-a)})^\alpha\frac{\Gamma(1+s\alpha)}{\Gamma(1+(s+1)\alpha)}(|f^{(\alpha)}(\frac{a+b}{2})|^q+|f^{(\alpha)}(x)|^q),\tag{26}$$

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{b-x}{b-a}}|f^{(\alpha)}((1-\lambda)a+\lambda b)|^q(\mathrm{d}\lambda)^\alpha\leqslant$$

$$(\frac{a+b-2x}{2(b-a)})^\alpha\frac{\Gamma(1+s\alpha)}{\Gamma(1+(s+1)\alpha)}(|f^{(\alpha)}(\frac{a+b}{2})|^q+|f^{(\alpha)}(a+b-x)|^q),\tag{27}$$

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1}|f^{(\alpha)}((1-\lambda)a+\lambda b)|^q(\mathrm{d}\lambda)^\alpha\leqslant(\frac{x-a}{b-a})^\alpha\frac{\Gamma(1+s\alpha)}{\Gamma(1+(s+1)\alpha)}(|f^{(\alpha)}(b)|^q+|f^{(\alpha)}(a+b-x)|^q).\tag{28}$$

综合式(9)~(11), (25)~(28)，则式(24)得证.

注 3　在定理 6 中取 $x=a$，$c=b-a$，即可得到文[17]中的定理 2.3.

推论 6　设区间 $I\subseteq\mathbb{R}$，I° 是 I 的内部，$f:I^\circ\to\mathbb{R}^\alpha$，$a,b\in I^\circ$，$a<b$，$f\in D_\alpha[a,b]$，$f^{(\alpha)}\in C_\alpha[a,b]$，对于某个固定的 $s\in(0,1)$，$s\in(0,1)$ 是 $[a,b]$ 上第二种意义下的广义 s-凸函数，其中 $q>1$，则有

$$|\frac{f(a)+f(b)}{2^\alpha}-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^\alpha}{}_aI_b^{(\alpha)}f(t)|\leqslant(b-a)^\alpha[\frac{\Gamma(1+p\alpha)}{2^{(p+1)\alpha}\Gamma(1+(p+1)\alpha)}]^{\frac{1}{p}}[\frac{\Gamma(1+s\alpha)}{2^\alpha\Gamma(1+(s+1)\alpha)}]^{\frac{1}{q}}\times$$

$$[(|f^{(\alpha)}(a)|^q+|f^{(\alpha)}(\frac{a+b}{2})|^q)^{\frac{1}{q}}+(|f^{(\alpha)}(\frac{a+b}{2})|^q+|f^{(\alpha)}(b)|^q)^{\frac{1}{q}}].$$

证明　在定理 6 中取 $x=a$，$c=0$ 即得.

推论 7　设区间 $I\subseteq\mathbb{R}$，I° 是 I 的内部，$f:I^\circ\to\mathbb{R}^\alpha$，$a,b\in I^\circ$，$a<b$，$f\in D_\alpha[a,b]$，$f^{(\alpha)}\in C_\alpha[a,b]$，对于某个固定的 $s\in(0,1)$，$|f^{(\alpha)}|^q$ 是 $[a,b]$ 上第二种意义下的广义 s-凸函数，其中 $q>1$，则有

$$|\frac{1}{2^\alpha}(\frac{f(a)+f(b)}{2^\alpha}+f(\frac{a+b}{2}))-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^\alpha}{}_aI_b^{(\alpha)}f(t)|\leqslant(b-a)^\alpha[\frac{\Gamma(1+p\alpha)}{2^{(2p+1)\alpha}\Gamma(1+(p+1)\alpha)}]^{\frac{1}{p}}\times$$

$$[\frac{\Gamma(1+s\alpha)}{2^\alpha\Gamma(1+(s+1)\alpha)}]^{\frac{1}{q}}[(|f^{(\alpha)}(a)|^q+|f^{(\alpha)}(\frac{a+b}{2})|^q)^{\frac{1}{q}}+(|f^{(\alpha)}(\frac{a+b}{2})|^q+|f^{(\alpha)}(b)|^q)^{\frac{1}{q}}].$$

证明　在定理 6 中取 $x=a$, $c=\frac{b-a}{2}$ 即得.

参考文献

[1] Ostrowski A. *Über die absolute abweichung einer differentiebaren funktion von ihren integralmittelwert* [J]. Comment Math Helv, 1938(10): 226~227

[2] 匡继昌. 常用不等式[M]. 第 4 版. 济南：山东科学技术出版社, 2010: 665~671

[3] Dragomir S S, Rassias T M. *Ostrowski type inequalities and applications in numerical integration*[M]. Dordrecht: Kluwer Academic, 2002

[4] Sarikaya M, Budak H. *Generalized Ostrowski type inequalities for local fractional integrals*[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2017, 145(4): 1527~1538

[5] Alomari M, Darus M, Dragomir S S, et al. *Ostrowski type inequalities for functions whose derivatives are s-convex in the second sense*[J]. Applied Mathematics Letters, 2010, 23(9): 1071~1076

[6] Set E , Ozdemir M E , Sarikaya M Z . *New inequalities of Ostrowski's type for s-convex functions in the second sense with applications*[J]. Mathematics, 2012, 217(1): 67~82

[7] Özdemir M E, Kavurmaci-Önalan H. *New inequalities of Ostrowski type for mappings whose derivatives are (α, m)-convex via fractional integrals*[J]. Thai Journal of Mathematics, 2018, 16(3): 723~731

[8] 焦寨军，李　登，时统业. 加权 Ostrowski 型不等式[J]. 湖南理工学院学报(自然科学版), 2013, 26(4): 1~7, 35

[9] 时统业，吴　涵，韦晓萍. 关于 *n* 阶可微函数的加权 Ostrowski 型不等式[J]. 湖南理工学院学报(自然科学版), 2014, 27(3): 7~13

[10] 孙文兵. 局部分数阶积分下关于广义调和 *s*-凸函数的 Ostrowski 型不等式[J]. 浙江大学学报(理学版), 45(5): 555~561

[11] Yang X J. *Advanced local fractional calculus and its applications*[M]. New York: World Science Publisher, 2012

[12] Mo H X, Sui X, Yu D Y. *Generalized convex functions on fractal sets and two related inequalities*[C]. Abstract and Applied Analysis. Hindawi, 2014, 2014: 1~7

[13] Mo H X. *Generalized Hermite-Hadamard type inequalities involving local fractional integrals*[J]. arXiv preprint arXiv:1410.1062, 2014

[14] 孙文兵，刘　琼. 分形集上广义凸函数的新 Hermite-Hadamard 型不等式及其应用[J]. 浙江大学学报(理学版), 2017, 44(01): 47~52

[15] Mo H X , Sui X . *Generalized s-convex functions on fractal sets*[J]. Abstract and Applied Analysis, 2014, 2014:1~8

[16] Mo H X, Sui X. *Hermite-Hadamard-type inequalities for generalized s-convex functions on real linear fractal set* $R^\alpha(0<\alpha<1)$[J]. Mathematical Sciences, 2017, 11(3): 241~246

[17] 孙文兵. 分形空间上的新 Hadamard 型不等式及应用[J]. 华东师范大学学报(自然科学版), 2017(6): 33~41