Hp 型间断有限元方法解奇异摄动 Volterra 积分微分方程

陶　霞，张映辉
(湖南理工学院 数学学院，湖南 岳阳 414006)

摘　要：通过局部加密网格和提高分片多项式次数两种策略，用 hp 型间断有限元方法解奇异摄动 Volterra 积分微分方程. 数值计算结果表明，hp 型间断有限元解的数值通量在节点处具有与小参数无关的一致指数收敛性，而且 hp 型间断有限元解在 L^2 范数下具有一致指数收敛性.

关键词：hp 型间断有限元方法；奇异摄动 Volterra 积分微分方程；一致指数收敛
中图分类号：O241.8　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1672-5298(2019)03-0001-03

Hp-version Discontinuous Galerkin Method for Singularly Perturbed Volterra Integro-differential Equations

TAO Xia, ZHANG Yinghui
(School of Mathematics, Hunan Institute of Science and Technology, Yueyang 414006, China)

Abstract: By two strategies of locally refined meshes and increasing the degree of piecewise polynomials, the numerical scheme of hp-version discontinuous Galerkin method for singularly perturbed Volterra integro-differential equations is firstly designed in this paper. Then numerical results show that not only the numerical flux of the hp-version discontinuous Galerkin solutions at nodes has the uniform exponential rate of convergence property independent of the singularly perturbed parameter, but also the hp-version discontinuous Galerkin solutions in L^2 norm has the uniform exponential rate of convergence property.

Key words: hp-version discontinuous Galerkin method; singularly perturbed Volterra integro-differential equations; uniform exponential rate of convergence

0 引言

在物理和生物等领域中，诸多问题都可归结为一类典型的奇异摄动问题——奇异摄动 Volterra 积分微分方程[1~6]. 本文主要考虑如下奇异摄动 Volterra 积分微分方程：

$$\begin{cases} \varepsilon u'(t)+a(t)u(t)+\int_0^t k(t,s)u(s)\mathrm{d}s = f(t), \quad t\in[0,T], \\ u(0)=u_0. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $0<\varepsilon\ll 1$ 为小参数，$0<\alpha\leqslant a(t)$，$f(t)$ 和 $k(t,s)$ 充分光滑.

间断有限元方法(DG)[7~10]采用完全不连续的分片多项式空间作为逼近空间，自由度的选择具有较强的灵活性，数值格式具有局部紧凑性，能较好地模拟解的局部剧烈变化，可以有效计算奇异摄动问题. DG 方法首次被 Reed 和 Hill[7]提出，主要用于求解中子输运方程. Cockburn 和 Shu[10]提出局部间断有限元方法(LDG)，有效求解奇异摄动对流扩散方程. 对于奇异摄动对流扩散方程，Xie[11, 12]等采取局部加密网格策略，证明了 DG 解的数值通量在节点处具有 $2p+1$ 阶超收敛，并且从数值上观察到 DG 解具有与小参数无关的一致收敛性. 解一维对流扩散方程，Xie[13]等从理论上证明了 h 型 DG 解的数值通量在节点处具有 $2p+1$ 阶的一致超收敛性. 对于 Volterra 积分微分方程，Brunner 和 Schotzau[14]证明了 hp 型间断有限元方法具有指

收稿日期：2019-06-20
基金项目：国家自然科学基金委数学天元基金资助项目(11426103)；湖南省教育厅优秀青年科学研究项目(16B112)；湖南理工学院教学改革研究项目(2017B16)；湖南省教育科学“十二五”规划青年专项资助课题(XJK015QGD007)；湖南省普通高等学校教学改革研究项目(湘教通[2017]452 号-324)；湖南省重点学科建设项目和湖南省高校科技创新团队支持计划项目
作者简介：陶　霞(1982−)，女，湖南湘阴人，博士，副教授. 主要研究方向：微分方程数值解

数收敛性. 对于奇异摄动 Volterra 积分微分方程, 在局部加密网格下, 文[15]从数值结果上得到 LDG 解的数值通量在节点处具有 $2p+1$ 阶的一致超收敛性. 文[16]运用 p 型间断有限元方法求解奇异摄动初值问题, 即将区间剖分为两个子区间, 并提高每个子区间上的分片多项式次数, 从数值结果上得到 p 型 DG 解的数值通量在节点处具有一致指数收敛性. 结合局部加密网格和提高分片多项式策略, 本文将运用 hp 型间断有限元方法解奇异摄动 Volterra 积分微分方程, 并分析其收敛性. 数值计算结果表明, hp 型 DG 解的数值通量在节点处具有与小参数无关的一致指数收敛性, 而且 hp 型 DG 解在 L^2 范数下具有一致指数收敛性.

1 hp 型间断有限元方法

将区间 $[0,T]$ 剖分为两部分, 即边界层区域 $[0,\tau]$ 和外部区域 $(\tau,T]$, 其中 τ 为过渡点. 对边界层区域和外部区域分别采取局部加密策略, 对应的剖分节点为 $0=t_0<t_1<\cdots<t_{\frac{N}{2}}=\tau$ 和 $\tau=t_{\frac{N}{2}}<t_{\frac{N}{2}+1}<\cdots<t_N=T$. 剖分子区间为 $I_n=(t_{n-1},t_n)$, 子区间 I_n 对应的步长记为 $h_i(i=1,2,\cdots,\frac{N}{2},\frac{N+1}{2},\cdots,N)$. 在子区间 I_n 上定义次数不超过 p 次的多项式空间为

$$V=\{v:v\in P^p(I_n),t\in I_n,n=1,2\}\ (p\geqslant 1).$$

对式(1)两边乘以 $v\in V$, 并在相应区间上积分后, 得

$$(\varepsilon u',v)+(au,v)+(\int_0^t k(t,s)u(s)\mathrm{d}s,v)=(f,v).$$

间断有限元方法为: 寻找 $U\in V$, 使得

$$-\varepsilon\int_{I_n}Uv'\mathrm{d}t+\int_{I_n}aUv\mathrm{d}t+\int_{I_n}\int_0^t k(t,s)U(s)\mathrm{d}sv\mathrm{d}t+\varepsilon\hat{U}_n v_n^- -\varepsilon\hat{U}_{n-1}v_{n-1}^+=\int_{I_n}fv\mathrm{d}t.$$

其中 $\hat{U}$ 为数值通量. 这里选取如下数值通量

$$\hat{U}_n=\begin{cases}U_n^-, & n=1,2,\cdots,N,\\ u_0, & n=0.\end{cases}$$

其中 u_0 为初值.

hp 型间断有限元方法为: 寻找 $U\in V$, 使得

$$\begin{aligned}-\varepsilon\int_{I_n}Uv'\mathrm{d}t+\int_{I_n}aUv\mathrm{d}t+\int_{I_n}\int_{t_{n-1}}^t k(t,s)U(s)\mathrm{d}sv\mathrm{d}t+\varepsilon U_n^- v_n^-=\\ \varepsilon U_{n-1}^- v_{n-1}^+ +\int_{I_n}fv\mathrm{d}t-\int_{I_n}\int_0^{t_{n-1}}k(t,s)U(s)\mathrm{d}sv\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{2}$$

特别地, 当 $n=1$ 时, 有

$$-\varepsilon\int_{I_1}Uv'\mathrm{d}t+\int_{I_1}aUv\mathrm{d}t+\int_{I_1}\int_0^t k(t,s)U(s)\mathrm{d}sv\mathrm{d}t+\varepsilon U_1^- v_1^-=\varepsilon u_0 v_0^+ +\int_{I_1}fv\mathrm{d}t.\tag{3}$$

在子区间 I_n 上, 令 $U=\sum_{j=1}^{p+1}u_j^{(n)}\phi_j^{(n)}$, $v=\phi_i^{(n)}$, 其中 $\{\phi_j^{(n)}\}_{j=1}^{p+1}$ 为 I_n 上次数不超过 p 次的基函数. 那么式(3)可写为

$$\begin{aligned}-\varepsilon\sum_{j=1}^{p+1}\int_{I_1}[\phi_i^{(1)}]'\phi_j^{(1)}\mathrm{d}tu_j^{(1)}+\sum_{j=1}^{p+1}\int_{I_1}a\phi_i^{(1)}\phi_j^{(1)}\mathrm{d}tu_j^{(1)}+\sum_{j=1}^{p+1}\int_{I_1}\int_0^t k(t,s)\phi_j^{(1)}(s)\mathrm{d}s\phi_i^{(1)}\mathrm{d}tu_j^{(1)}+\varepsilon U_1^-(\phi_i^{(1)})_1^-=\\ \varepsilon u_0(\phi_i^{(1)})_0^+ +\int_{I_1}f(t)\phi_i^{(1)}\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{4}$$

同理, 当 $n=2,\cdots,N$ 时, 式(2)可写为

$$\begin{aligned}-\varepsilon\sum_{j=1}^{p+1}\int_{I_n}[\phi_i^{(n)}]'\phi_j^{(n)}\mathrm{d}tu_j^{(n)}+\sum_{j=1}^{p+1}\int_{I_n}a\phi_i^{(n)}\phi_j^{(n)}\mathrm{d}tu_j^{(n)}+\sum_{j=1}^{p+1}\int_{I_n}\int_{t_{n-1}}^t k(t,s)\phi_j^{(n)}(s)\mathrm{d}s\phi_i^{(n)}\mathrm{d}tu_j^{(n)}+\varepsilon U_n^-(\phi_i^{(n)})_n^-=\\ \varepsilon u_0(\phi_i^{(n)})_{n-1}^+ +\int_{I_n}f(t)\phi_i^{(n)}\mathrm{d}t-\sum_{j=1}^{p+1}\sum_{q=1}^{n-1}\int_{I_n}\int_{I_q}k(t,s)\phi_j^{(q)}(s)\mathrm{d}s\phi_i^{(n)}\mathrm{d}tu_j^{(q)}.\end{aligned}\tag{5}$$

经过一些简单的线性变换, 如 $t=\frac{t_{n-1}+t_n}{2}+\frac{h_n}{2}\xi,\ s=\frac{t+t_{n-1}}{2}+\frac{t-t_{n-1}}{2}\eta$ ($\xi\in[-1,1],\ \eta\in[-1,1]$), 可将区间 I_n 转化到参考单元 $[-1,1]$ 上, 得到相应于式(4)和式(5)的数值格式.

2 数值算例

对于奇异摄动 Volterra 积分微分方程 (1), 取 $a=1,\ k(t,s)=\exp(-(t-s))$, $T=1$, 初值为 $u(0)=1+\exp(-1)$, 对应的右端项为

$$f(t)=(\varepsilon+\frac{3}{2})\exp(t-1)-2\varepsilon\exp(-\frac{(1+\varepsilon)}{\varepsilon}t)-\frac{1}{2}\exp(-t-1)+\varepsilon\exp(-t).$$

其真解为

$$u(t)=\exp(t-1)+\exp(-\frac{(1+\varepsilon)t}{\varepsilon}).$$

在初始点 $t=0$ 附近, 解的边界层宽度为 $O(\varepsilon)$. 定义

$$\|u-\hat{U}\|_{\infty}=\max_{0\leqslant i\leqslant N}|u(t_i)-\hat{U}(t_i)|,\ \|u-U\|_{L^2}=\left(\sum_{i=1}^{N}\int_{I_i}(u-U)^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

下面给出 Shishkin 网格下的数值结果. 对边界层区域 $[0,\tau]$ 和外部区域 $(\tau,T]$ 均进行 $\frac{N}{2}$ 等分, 对应的子区间步长分别为 $h=\frac{2\tau}{N}$ 和 $H=\frac{2(T-\tau)}{N}$. 取过渡点 τ 为

$$\tau=\min(0.5,\varepsilon(2p+1)\log(N+1)).$$

当小参数 ε 分别取 10^{-4} 、10^{-6} 和 10^{-8} 时, 表 1 给出多项式次数 p 和剖分区间数 N 所对应的 hp 型间断有限元解的 L^2 模误差和相应数值通量的最大模误差. 从实验结果可观察到: hp 型间断有限元解在 L^2 模意义下具有指数收敛性, 而且微弱依赖于小参数 ε; hp 型间断有限元解的数值通量在最大模意义下同样具有指数收敛性质, 而且不依赖于小参数 ε. 数值计算结果表明, hp 型间断有限元解的数值通量在节点处具有与小参数无关的一致指数收敛性, 而且 hp 型间断有限元解在 L^2 范数下具有一致指数收敛性.

表 1　hp 型间断有限元方法, $\tau=\min(0.5,\varepsilon(2p+1)\lg(N+1))$

p	N	$\varepsilon=10^{-4}$		$\varepsilon=10^{-6}$		$\varepsilon=10^{-8}$	
		$\|u-\hat{U}\|_{\infty}$	$\|u-U\|_{L^2}$	$\|u-\hat{U}\|_{\infty}$	$\|u-U\|_{L^2}$	$\|u-\hat{U}\|_{\infty}$	$\|u-U\|_{L^2}$
1	4	3.491e-2	6.196e-3	3.491e-2	6.046e-3	3.491e-2	6.045e-3
2	16	6.225e-4	1.358e-4	6.225e-4	1.416e-5	6.225e-4	4.263e-6
3	64	1.258e-7	1.309e-6	1.258e-7	1.309e-7	1.258e-7	1.309e-8
4	256	1.609e-13	9.205e-10	1.610e-13	9.201e-11	1.605e-13	9.201e-12

参考文献

[1] J. P. Kauthen. *A survey of singularly perturbed Volterra equations*[J]. Appl. Numer. Math., 1997, 24: 95~114
[2] J. S. Angell, W. E. Olmstead. *Singularly perturbed Volterra integral equations*[J]. SIAM J. Numer. Math., 1987, 47: 1~14
[3] J. S. Angell, W. E. Olmstead. *Singularly perturbed Volterra integral equations* Ⅱ[J]. SIAM J. Numer. Math., 1987, 47: 1150~1162.
[4] A. M. Bijura. *Rigorous results on the asymptotic solutions of singularly perturbed nonlinear Volterra integral equations*[J]. J. Integ. Equat. Appl., 2002, 14: 119~149
[5] A. M. Bijura. *Asymptotics of integrodifferential models with integrable kernels*[J]. Int. J. Math. Sci., 2003, 25: 1577~1598
[6] G. S. Jordan. *A nonlinear singularly perturbed Volterra integrodifferential equation of nonconvolution type*[J]. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.1978, 80: 235~247
[7] W.H. Reed, T.R. Hill. *Triangular mesh methods for the neutron transport equation*[R]. Los Alamos Report LA-UR-73-479, 1973
[8] H.G. Roos, M. Stynes, L. Tobiska. *Numerical methods for singularly perturbed differential equation*[M]. Springer, Berlin, 1996
[9] H.G. Roos, M. Stynes, L. Tobiska. *Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations*[M]. Springer, 2008
[10] B. Cockburn, C.W. Shu. *The local discontinuous Galerkin method for time-dependent convection-diffusion systems*[J]. SIAM J. Numer. Anal., 1998, 35: 2440~2463
[11] Z.Q. Xie, Z.M. Zhang. *Superconvergence of DG method for one-dimensional singularly perturbed problems*[J]. J. Comput. Math., 2007, 25: 185~200
[12] Z.Z. Zhang, Z.Q. Xie, Z.M. Zhang. *A numerical study of uniform superconvergence of LDG method for solving singularly perturbed problems*[J]. J. Comput. Math., 2009, 27: 80-298.
[13] Z.Q. Xie, Z.M. Zhang. *Uniform superconvergence analysis of the discontinuous Galerkin method for a singularly perturbed problem in 1-D*[J]. Math. Comput., 2010, 79: 35~45
[14] H. Brunner, D. Schotzau. *hp-discontinuous Galerkin time-stepping for Volterra integro-differential equations*[J]. SIAM J. Numer. Anal., 2006, 44(1) : 224~245
[15] 陶　霞. 用 LDG 方法求解奇异摄动 Volterra 积分微分方程[J]. 数学理论与应用, 2015, 35(2) : 18~23
[16] 陶　霞, 王湘红. P 型间断有限元方法求解奇异摄动初值问题[J]. 湖南理工学院学报(自然科学版), 2015, 28(3) : 9~11