一个三角矩阵之逆与 Catalan 数恒等式

祁 锋
(1. 内蒙古民族大学 数学学院, 内蒙古 通辽 028043; 2. 天津工业大学 数学科学学院, 天津 300389)

摘 要: 在简单介绍Catalan数和第二类Chebyshev多项式的基本知识后, 以一种真实且自然的形式重新阐述研究过程, 包括研究的动因, 问题的产生, 对问题答案的两种猜测, 猜测的解决过程, 由猜测的解答衍生出来的新结论, 新成果与已知结果的比较等. 这项研究的成果包括与第二类Chebyshev多项式和Catalan数相关的一个矩阵之逆、一个反演定理和几个恒等式.

关键词: 第二类Chebyshev多项式; Catalan数; 矩阵之逆; 恒等式; 猜测; 超几何函数; 反演定理; 第二类Bell多项式
中图分类号: O156.4; O157.1; O174.6 **文献标识码**: A **文章编号**: 1672-5298(2020)02-0001-11

Inverse of a Triangular Matrix and Several Identities of Catalan Numbers

QI Feng
(1. College of Mathematics, Inner Mongolia University for Nationalities, Tongliao 028043, China;
2. School of Mathematical Sciences, Tianjin Polytechnic University, Tianjin 300389, China)

Abstract: After Catalan numbers and Chebyshev polynomial of the second kind were introduced, the author tends to really and naturally state the process of a research, including its motivations, generating of related problems, two guesses on answers to problems, solving process of guesses, new results derived from answers to two guesses, comparisons of new results with related known results, and the like. The results in the research include the inverse of a lower triangular matrix, an inversion theorem, and several identities related to the Chebyshev polynomials of the second kind and the Catalan numbers.

Key words: Chebyshev polynomial of the second kind; Catalan number; inverse of a matrix; identity; guess; hypergeometric function; inversion theorem; Bell polynomial of the second kind

1 关于 Catalan 数的简介

关于Catalan数, 已经出版有专著[14,16, 57, 60]. 这些专著中收集了目前关于Catalan数的几乎所有研究文献.

1.1 Catalan 数的起源

Catalan数或Catalan数列有两个起源.

20世纪80年代发现, 清朝时期的蒙古族数学家明安图在1730年使用过这个数列, 请参考考证明安图与Catalan数渊源的文献[17, 18, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 61]以及后来提及明安图与Catalan数的渊源的研究文献[14, 16, 19, 41, 57, 60].

在18世纪, 瑞士数学家Leonhard Euler对Catalan数进行了描述, 但以比利时数学家Eugéne Charles Catalan的名字命名它, 参阅专著[14, 16, 57, 60]以及在那里列出的相关参考文献.

1.2 Catalan 数的显式计算公式

Catalan数用 C_n 来表示. Catalan数有多种显式表达式, 例如

$$C_n=\frac{1}{n+1}\mathrm{C}_{2n}^{n}=\frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}=\frac{1}{n}\mathrm{C}_{2n}^{n-1}=\frac{2^n(2n-1)!!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(\mathrm{C}_n^k)^2=\mathrm{C}_{2n}^{n}-\mathrm{C}_{2n}^{n+1}=$$

$$\frac{1}{(n+1)!}\prod_{k=1}^{n}(4k-2)={}_2F_1(1-n,-n;2;1)=\frac{4^n\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+2)},$$

收稿日期: 2019-02-21
作者简介: 祁 锋(1965−), 男, 河南新乡人, 博士, 教授. 主要研究方向: 解析不等式

其中 ${}_2F_1(a,b;c;z)$ 叫做超几何函数. 一般地

$$ {}_pF_q(a_1,\cdots,a_p;b_1,\cdots,b_q;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n\cdots(a_p)_n z^n}{(b_1)_n\cdots(a_q)_n n!}, $$
$$ p,q\in\mathbb{N},\ a_i\in\mathbb{C},\ b_i\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\cdots\}, $$
$$ (x)_n=\begin{cases}x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1), & n\in\mathbb{N};\\ 1, & n=0\end{cases} $$

叫做广义超几何级数, 而 $\Gamma(z)=\int_0^{\infty}t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t,\mathbf{R}(z)>0$, 或

$$ \Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^z}{\prod_{k=0}^{n}(z+k)},\ z\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\cdots\} $$

是经典的 Euler 伽马函数, 参看[47, 63].

1.3 Catalan 数的生成函数

所有的 Catalan 数 C_n 都可以由初等函数 $\frac{2}{1+\sqrt{1-4x}}$ 生成, 也就是说,

$$ \frac{2}{1+\sqrt{1-4x}}=\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^n=1+x+2x^2+5x^3+\cdots. \tag{1.1} $$

在解析组合论中, 寻找构造组合数列的生成函数是一个专门的研究方向. 由生成函数的性质可以得到相应的组合序列的许多性质. 参阅[65]及其参考文献.

1.4 Catalan 数的渐进展开式

前面提到, Catalan 数 C_n 可以用 Euler 伽马函数表示为

$$ C_n=\frac{4^n\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+2)},n\geqslant 0. \tag{1.2} $$

当将 n 换成连续变量 x 的时候, Catalan 函数 C_x 具有一个渐进展开式:

$$ C_x\triangleq\frac{4^x\Gamma(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(x+2)}\sim\frac{4^x}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}-\frac{9}{8}\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}+\frac{145}{128}\frac{1}{x^{\frac{7}{2}}}+\cdots\right),\quad x\to\infty. \tag{1.3} $$

参见[16, pp. 110~111]和[62].

1.5 Catalan 数的积分表示

Catalan 数 C_n 可以表示为积分形式, 而且 Catalan 数 C_n 具有多个积分表示. 值得一提的是最早发现的 Catalan 数 C_n 的积分表示:

$$ C_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^4\sqrt{\frac{4-x}{x}}x^n\mathrm{d}x,n\geqslant 0. \tag{1.4} $$

它是由 Penson 和 Sixdeniers 于 2001 年在文[31]中利用 Mellin 变换等方法建立起来的.

基于复变函数论中的 Cauchy 积分公式, 在[49]中得到了 Catalan 数 C_n 的一个新的积分表示:

$$ C_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{t}}{(t+\frac{1}{4})^{n+2}}\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{t^2}{(t^2+\frac{1}{4})^{n+2}}\mathrm{d}t. \tag{1.5} $$

根据这个积分表示和完全单调函数理论的知识, 文献[49]中发现了许多关于 Catalan 数 C_n 的新性质.

文献[6, 7, 8, 9, 29, 34, 36]对 Catalan 数的积分表示也做了更多研究. 文献[41]专门回顾、收集、综述、讨论了 Catalan 数 C_n 的各种积分表示形式.

1.6 Catalan 数的推广

Catalan 数 C_n 有多种推广, 例如 Fuss 数、Catalan-Fuss 数、q-Catalan 数等等. 最近, Catalan 数 C_n 有一系列新的解析推广. 例如, 在表示式(1.2)的启发下, Catalan 数 C_n 可以推广为

$$C(a,b;z)=\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)}\left(\frac{b}{a}\right)^{z}\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)}$$

和

$$Q(a,b;p,q;z)=\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)}\left(\frac{b}{a}\right)^{(q-p+1)z}[\Gamma(z+1)]^{q-p}\frac{\Gamma(pz+a)}{\Gamma(qz+b)},$$

其中$\mathbf{R}(a)$, $\mathbf{R}(b)>0$, $\mathbf{R}(p)$, $\mathbf{R}(q)>0$, $\mathbf{R}(z)\geqslant 0$. 参看[52]和综述论文[44]中列出的有关参考文献.

之后, 对应于 Catalan 数 C_n 的生成函数(1.1)、Catalan 函数 C_x 的渐进展开式(1.3)、Catalan 数的积分表示(1.4)和(1.5)等, 关于 Catalan 数 C_n 的两个推广 $C(a,b;z)$ 和 $Q(a,b;p,q;z)$ 的一系列结果都相继正式发表. 参考[21, 27, 33, 35, 38, 42, 43, 45, 48, 49, 51, 52, 54, 58, 68, 69], 特别是综述论文[44]及其列出的相关参考文献.

2 关于 Chebyshev 多项式的简介

众所周知, Chebyshev 多项式有两类: 第一类 T_n 和第二类 $U_n(x)$. 在常微分方程的研究中, 它们分别是 Chebyshev 微分方程 $(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$ 和 $(1-x^2)y''-3xy'+n(n+2)y=0$ 的解. 参看[13, pp. xxxv and 1004].

Chebyshev 多项式是特殊函数理论的重要组成部分. 在众多的普通数学手册[1, 3, 11, 13, 30, 66]里面都可以查阅到关于 Chebyshev 多项式的丰富结果. Chebyshev 多项式有广泛的应用. 参考专著[12, 28, 59]和论文[37, 47]等.

第二类 Chebyshev 多项式 $U_n(x)$ 可以由一个简单的初等函数

$$F(t)=F(t,x)=\frac{1}{1-2xt+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}U_n(x)t^n,\ -1<x,t<1$$

生成. 在本文的后继部分, 将用到这个简单结果.

3 与 Catalan 数和第二类 Chebyshev 多项式相关的一个矩阵之逆和几个恒等式

3.1 研究动因

在文[15]中, 韩国和俄罗斯的四位数学家证明了第二类 Chebyshev 多项式 $U_n(x)$ 的生成函数 $F(t)$ 满足非线性常微分方程

$$2^n n! F^{n+1}(t)=\sum_{i=1}^{n}a_i(n)(x-t)^{i-2n}F^{(i)}(t),\ n\in\mathbb{N} \tag{3.1}$$

等一系列结果, 其中 $a_1(n)=(2n-3)!!$, 而当 $2\leqslant i\leqslant n$ 时, 有

$$a_i(n)=\sum_{k_{i-1}=0}^{n-i}\sum_{k_{i-2}=0}^{n-i-k_{i-1}}\cdots\sum_{k_1=0}^{n-i-k_{i-1}-\cdots-k_2}2^{\sum_{j=1}^{i-1}k_j}\prod_{j=2}^{i}\left\langle n-\sum_{l=j}^{i-1}k_l-\frac{2i+2-j}{2}\right\rangle_{k_{j-1}}(2(n-i-\sum_{j=1}^{i-1}k_j)-1)!!, \tag{3.2}$$

这里的

$$\langle x\rangle_n=\prod_{k=0}^{n-1}(x-k)=\begin{cases}x(x-1)\cdots(x-n+1), & n\geqslant 1\\ 1, & n=0\end{cases}$$

叫做降阶乘, 而其中的负奇数 $-2n-1$ 的双阶乘定义为

$$(-2n-1)!!=\frac{(-1)^n}{(2n-1)!!}=(-1)^n\frac{2^n n!}{(2n)!},\ n\geqslant 0.$$

显而易见, 表达式(3.2)是复杂的, 很难计算、理解、记忆. 因此, 想得到这个表达式的一个简单、好算、易记、容易理解的形式.

3.2 第二类 Chebyshev 多项式的生成函数的导数

文[15]中使用的方法是递推和数学归纳法. 为了得到 (3.2)的一个简单、好算、易记、易于理解的形式, 首先使用下列几个引理去计算第二类 Chebyshev 多项式 $U_n(x)$ 的生成函数 $F(t)$ 的高阶导数.

引理 3.1 ([5, p. 134, Theorem A]和[5, p. 139, Theorem C]) 对 $n \geqslant k \geqslant 0$, 第二类 Bell 多项式 $B_{n,k}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-k+1})$ 定义为

$$B_{n,k}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-k+1}) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n-k+1 \\ l_i \in \{0\} \cup \mathbb{N} \\ \sum_{i=1}^{n-k+1} i l_i = n \\ \sum_{i=1}^{n-k+1} l_i = k}} \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n-k+1} l_i!} \prod_{i=1}^{n-k+1} \left(\frac{x_i}{i!}\right)^{l_i}.$$

用来计算复合函数的任意高阶导数的 Faà di Bruno 公式可以用第二类 Bell 多项式 $B_{n,k}$ 表达为

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} f \circ h(t) = \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(h(t)) B_{n,k}(h'(t), h''(t), \cdots, h^{(n-k+1)}(t)), n \in \mathbb{N}.$$

引理 3.2 ([5, p. 135]) 对于任意的复数 a 和 b, 第二类 Bell 多项式 $B_{n,k}$ 满足恒等式

$$B_{n,k}(abx_1, ab^2x_2, \cdots, ab^{n-k+1}x_{n-k+1}) = a^k b^n B_{n,k}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-k+1}).$$

引理 3.3 ([39, Theorem 4.1], [50, Eq. (2.8)], [64, Lemma 2.5]) 当 $0 \leqslant k \leqslant n$ 时, 第二类 Bell 多项式 $B_{n,k}$ 满足

$$B_{n,k}(x, 1, 0, \cdots, 0) = \frac{1}{2^{n-k}} \frac{n!}{k!} \mathrm{C}_k^{n-k} x^{2k-n},$$

其中当 $q > p \geqslant 0$ 时, $\mathrm{C}_p^q = 0$.

根据上述三个引理, 可以直接得到

定理 3.1 ([55, Theorem 3.1]) 对于 $n \in \mathbb{N}$, 第二类 Chebyshev 多项式 $U_n(x)$ 的生成函数 $F(t)$ 的 n 阶导数满足

$$F^{(n)}(t) = \frac{n!}{[2(t-x)]^n} \sum_{k=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{n} (-1)^k \mathrm{C}_k^{n-k} [2(t-x)]^{2k} F^{k+1}(t), \tag{3.3}$$

其中天花板函数 $\lceil x \rceil$ 定义为不小于 x 的最小整数. 因此, 第二类 Chebyshev 多项式 $U_n(x)$ 可以表示成

$$U_n(x) = \frac{(-1)^n}{(2x)^n} \sum_{k=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{n} (-1)^k \mathrm{C}_k^{n-k} (2x)^{2k}.$$

3.3 逆矩阵问题的产生

注意到方程(3.3)可以写成矩阵的形式:

$$\begin{pmatrix} \frac{[2(t-x)]^1}{1!} F'(t) \\ \frac{[2(t-x)]^2}{2!} F''(t) \\ \frac{[2(t-x)]^3}{3!} F^{(3)}(t) \\ \vdots \\ \frac{[2(t-x)]^{n-2}}{(n-2)!} F^{(n-2)}(t) \\ \frac{[2(t-x)]^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n-1)}(t) \\ \frac{[2(t-x)]^n}{n!} F^{(n)}(t) \end{pmatrix} = A_n \begin{pmatrix} (-1)^1 [2(x-t)]^2 F^2(t) \\ (-1)^2 [2(x-t)]^4 F^3(t) \\ (-1)^3 [2(x-t)]^6 F^4(t) \\ \vdots \\ (-1)^{n-2} [2(x-t)]^{2(n-2)} F^{n-1}(t) \\ (-1)^{n-1} [2(x-t)]^{2(n-1)} F^n(t) \\ (-1)^n [2(x-t)]^{2n} F^{n+1}(t) \end{pmatrix},$$

其中矩阵

$$A_n=(a_{i,j})_{n\times n}=\begin{pmatrix} C_1^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_1^1 & C_2^0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2^1 & C_3^0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2^2 & C_3^1 & C_4^0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_3^2 & C_4^1 & C_5^0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_3^3 & C_4^2 & C_5^1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_4^3 & C_5^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{n-3}^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{n-3}^1 & C_{n-2}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{n-3}^2 & C_{n-2}^1 & C_{n-1}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{n-3}^3 & C_{n-2}^2 & C_{n-1}^1 & C_n^0 \end{pmatrix}$$

的元素可以写成

$$a_{i,j}=\begin{cases} 0, & i<j; \\ C_j^{i-j}, & j\leqslant i\leqslant 2j; \\ 0, & i>2j. \end{cases}$$

显然, 矩阵 A_n 是可逆的. 因而

$$\begin{pmatrix} (-1)^1[2(x-t)]^2F^2(t) \\ (-1)^2[2(x-t)]^4F^3(t) \\ (-1)^3[2(x-t)]^6F^4(t) \\ \vdots \\ (-1)^{n-2}[2(x-t)]^{2(n-2)}F^{n-1}(t) \\ (-1)^{n-1}[2(x-t)]^{2(n-1)}F^n(t) \\ (-1)^n[2(x-t)]^{2n}F^{n+1}(t) \end{pmatrix}=A_n^{-1}\begin{pmatrix} \frac{[2(t-x)]^1}{1!}F'(t) \\ \frac{[2(t-x)]^2}{2!}F''(t) \\ \frac{[2(t-x)]^3}{3!}F^{(3)}(t) \\ \vdots \\ \frac{[2(t-x)]^{n-2}}{(n-2)!}F^{(n-2)}(t) \\ \frac{[2(t-x)]^{n-1}}{(n-1)!}F^{(n-1)}(t) \\ \frac{[2(t-x)]^n}{n!}F^{(n)}(t) \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

因此, 当计算出可逆矩阵 A_n 的逆矩阵 A_n^{-1} 的时候, 结果(3.2)就可能被改写成简单、好算、易记、易于理解的形式. 这样, 起初要研究的问题转化成计算逆矩阵 A_n^{-1} 的问题了.

3.4 猜出逆矩阵的第一种形式

如何计算可逆矩阵 A_n 的逆矩阵 A_n^{-1}? 我们尝试了多种熟知的计算逆矩阵的办法, 但都以失败告终, 于是, 将该问题在 ResearchGate 网站公开征解, 但无人给出满意和有用的答案.

在尝试计算 A_n^{-1} 的过程中, 我们借助数学软件 Mathematica 计算了几个低阶矩阵的逆, 例如

$$A_7^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & -14 & 9 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -42 & 42 & -28 & 14 & -5 & 1 & 0 \\ 132 & -132 & 90 & -48 & 20 & -6 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

经过长时间的观察、对比、联想等, 我们惊奇地发现 A_7^{-1} 的第一列和第二列元素不仅几乎相同、而且它们就是前面提到的 Catalan 数, 于是我们猜想其它元素也一定和 Catalan 数有某种关系, 也就是和第一

列、第二列的元素有某种关系.

在 2016 年 12 月, 冒着严寒, 经过长达一周左右的被痛苦折磨的观察、尝试、计算, 我们终于猜出逆矩阵 $A_n^{-1}=(b_{i,j})_{n\times n}$ 的元素应该为

$$b_{i,j}=\begin{cases}0, & 1\leqslant i<j\leqslant n;\\ 1, & 1\leqslant i=j\leqslant n;\\ (-1)^{i-j}\sum\limits_{k=0}^{\frac{1}{2}[j-1-\frac{1+(-1)^j}{2}]}(-1)^k\mathrm{C}_{j-k-1}^{k}C_{i-k-1}, & n\geqslant i>j\geqslant 1.\end{cases} \tag{3.6}$$

显而易见, 这个表达式要比(3.2)简单、好算、易记、能理解了.

猜测是需要验证的. 然而验证这个猜测是困难的. 我们没有找到验证的办法. 我们在 ResearchGate 网站公开征解, 但无人给出验证的办法.

于是我们试图转化问题. 经过努力, 我们将验证(3.6)的问题进一步转化为证明下列四个恒等式

$$\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k\mathrm{C}_{n-k}^{k}C_{n-k}=1, \tag{3.7}$$

$$\sum_{\substack{i\leqslant 2l\leqslant 2i\\ l\geqslant j}}\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{j-1}{2}\rfloor}(-1)^{l-k}\mathrm{C}_{l}^{i-l}\mathrm{C}_{j-k-1}^{k}C_{l-k-1}=0, \tag{3.8}$$

$$\sum_{\substack{i\geqslant l\geqslant j\\ l\leqslant 2j}}\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{l-1}{2}\rfloor}(-1)^{l-k}\mathrm{C}_{j}^{l-j}\mathrm{C}_{l-k-1}^{k}C_{i-k-1}=0, \tag{3.9}$$

$$\frac{\sum\limits_{l=0}^{m-1}(-1)^l\mathrm{C}_{2m-l-1}^{l}\dfrac{n+2l+1}{n-l+1}C_{n-l-1}}{\sum\limits_{l=0}^{m-1}(-1)^l\mathrm{C}_{2m-l-2}^{l}\dfrac{1}{2m-2l-1}C_{n-l-1}}=m(2m-1), n\geqslant 2m\geqslant 2, \tag{3.10}$$

其中地板函数 $\lfloor x\rfloor$ 定义为不大于 x 的最大整数. 之后我们又在 ResearchGate 网站上公开征解这四个恒等式的证明, 但仍无人给出满意和有用的证明.

实际上, 上述转化并不成功, 因为证明这几个恒等式的难度并没有降低或减小, 难度并不亚于直接验证(3.6)式, 甚至难度还有所增加. 于是, 计算逆矩阵 A_n^{-1} 的工作再次陷入僵局.

3.5 猜出逆矩阵的第二种形式

由于恒等式(3.6)至(3.10)都含有 Catalan 数, 为了证明上述四个恒等式, 计算出 A_n 的逆矩阵 A_n^{-1},我们希望找到现成可用的结果, 于是开始查阅与 Catalan 数有关的文献.

首先恒等式(3.7)被偶然发现存在于[67, p. 2187, Theorem 2, Eq. (15b)]. 在一定程度上, 这个发现说明我们猜测的式(3.6)应该是正确的, 但仍然无法给我们提供解决问题的办法和思路.

2017 年 3 月的一天, 我们幸运地在[16, p. 113]发现下列表格

	1	2	3	4	5
1	1				
2	1	2			
3	1	3	5		
4	1	4	9	14	
5	1	5	14	28	42

并且意外地观察到, 从左上角往右下角看的话, 这个表格中的元素与矩阵(3.5)中的列是有对应关系的. 这个表格是为了列举下列引理.

引理 3.4 ([10]和[16, pp. 112~114]) 设 $T(r,1)=1$ 和 $T(r,c)=\sum_{i=c-1}^{r} T(i,c-1), c\geqslant 2$, 或者等价地设

$$T(r,c)=\sum_{j=1}^{c} T(r-1,j),\ r,c\in\mathbb{N}.$$

那么

$$T(r,c)=\frac{r-c+2}{r+1}\mathrm{C}_{r+c-1}^{r},\ r,c\in\mathbb{N}$$

且 $T(r,r)=C_r$.

进一步仔细地对比后, 我们又猜测出逆矩阵 $A_n^{-1}=(b_{i,j})_{n\times n}$ 的元素 $b_{i,j}$ 与 $T(r,c)$ 的关系

$$T(k+m,k)=(-1)^{k+1}b_{k+m+1,m+2},\ k\geqslant 1, m\geqslant 0.$$

由此进一步导出 $b_{i,j}$ 具有的另外一种表达式

$$b_{i,j}=\begin{cases}0, & 1\leqslant i<j;\\ (-1)^{i-j}\dfrac{j}{i}\mathrm{C}_{2i-j-1}^{i-1}, & i\geqslant j\geqslant 1.\end{cases} \tag{3.11}$$

显而易见, 表达式(3.11)要比(3.6)、(3.2)简单得多、好计算得多、容易记忆得多、容易理解得多. 因而我们对证明这个新的猜测充满信心.

3.6 逆矩阵的第二种形式的证明

根据(3.4)可知, 要证明(3.11)成立, 只需要证明

$$(-1)^n[2(x-t)]^{2n}F^{n+1}(t)=\sum_{k=1}^{n} b_{n,k}\frac{[2(t-x)]^k}{k!}F^{(k)}(t),\ n\in\mathbb{N}. \tag{3.12}$$

根据数学归纳法和一些简单的技巧, 很容易证明(3.12). 也就是说, 我们明确地计算出了逆矩阵 A_n^{-1}.

定理 3.2 ([55, Theorem 4.1]) 对于 $n\in\mathbb{N}$,

$$A_n^{-1}=(b_{i,j})_{n\times n}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 2 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ -5 & 5 & -3 & \cdots & 0 & 0\\ 14 & -14 & 9 & \cdots & 0 & 0\\ -42 & 42 & -28 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \dfrac{(-1)^{n-1}}{n-2}\mathrm{C}_{2n-6}^{n-3} & \dfrac{(-1)^n 2}{n-2}\mathrm{C}_{2n-7}^{n-3} & \dfrac{(-1)^{n-1}3}{n-2}\mathrm{C}_{2n-8}^{n-3} & \cdots & 0 & 0\\ \dfrac{(-1)^n}{n-1}\mathrm{C}_{2n-4}^{n-2} & \dfrac{(-1)^{n-1}2}{n-1}\mathrm{C}_{2n-5}^{n-2} & \dfrac{(-1)^n 3}{n-1}\mathrm{C}_{2n-6}^{n-2} & \cdots & 1 & 0\\ \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\mathrm{C}_{2n-2}^{n-1} & \dfrac{(-1)^n 2}{n}\mathrm{C}_{2n-3}^{n-1} & \dfrac{(-1)^{n-1}3}{n}\mathrm{C}_{2n-4}^{n-1} & \cdots & -(n-1) & 1 \end{pmatrix},$$

其中元素 $b_{i,j}$ 具有(3.11)的形式.

3.7 回答研究动因中的问题

根据矩阵方程(3.4)和定理 3.2, 立即得到方程(3.1)和表达式(3.2)的简单好算、易记易理解的形式.

定理 3.3 ([55, Theorem 3.1]) 设 $n\in\mathbb{N}$, 则

$$F^{n+1}(t)=\frac{1}{n}\frac{1}{[2(t-x)]^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{(k-1)!}\mathrm{C}_{2n-k-1}^{n-1}[2(t-x)]^k F^{(k)}(t).$$

由此立即可得

$$\sum_{k=1}^{n} k\,\mathrm{C}_{2n-k-1}^{n-1}\,(2x)^k U_k(x) = n(2x)^{2n}.$$

3.8 逆矩阵两种形式的相同性证明

由于已经猜测出逆矩阵 $A_n^{-1}=(b_{i,j})_{n\times n}$ 的元素 $b_{i,j}$ 具有两个不同的表达形式(3.6)和(3.11), 因而这两个表达形式应该相等, 也就是应该有

定理 3.4 ([55, Theorem 5.1]) 对于 $i \geqslant j \geqslant 1$,

$$\sum_{l=0}^{\left\lfloor \frac{j-1}{2} \right\rfloor} (-1)^l \mathrm{C}_{j-l-1}^{l}\, C_{i-l-1} = \frac{j}{i}\mathrm{C}_{2i-j-1}^{i-1}. \tag{3.13}$$

要证明定理 3.4, 那是相当不易的. 经过多次尝试, 并且根据最近几年在 Catalan 数方面积累的知识, 我们寻找到了证明定理 3.4 的方法.

为了将等式(3.13)左边的 Catalan 数换掉、消去、或变成其它容易处理的形式, 回想起 Catalan 数的一个积分表示(1.4). 这也许是积分表示(1.4)建立后的第一个应用. 在等式(3.13)左边使用 Catalan 数的积分表示(1.4)后, 得到

$$\sum_{l=0}^{\left\lfloor \frac{j-1}{2} \right\rfloor} (-1)^l \mathrm{C}_{j-l-1}^{l}\, C_{i-l-1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^4 \sqrt{\frac{4-x}{x}}\left[\sum_{l=0}^{\left\lfloor \frac{j-1}{2} \right\rfloor} (-1)^l \mathrm{C}_{j-l-1}^{l} x^{i-l-1}\right]\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^4 x^{i-\frac{3}{2}}(4-x)^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{l=0}^{\left\lfloor \frac{j-1}{2} \right\rfloor} \frac{(j-1-l)!}{(j-1-2l)!}\frac{1}{l!}\left(-\frac{1}{x}\right)^l\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^4 x^{i-\frac{3}{2}}(4-x)^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{l=0}^{\left\lfloor \frac{j-1}{2} \right\rfloor} \frac{\left(\frac{1-j}{2}\right)_l\left(\frac{2-j}{2}\right)_l}{(1-j)_l}\frac{1}{l!}\left(\frac{4}{x}\right)^l\right]\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^4 x^{i-\frac{3}{2}}(4-x)^{\frac{1}{2}}\,{}_2F_1\left(\frac{1-j}{2},\frac{2-j}{2};1-j;\frac{4}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{4^i}{2\pi}\int_0^1 t^{i-\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\,{}_2F_1\left(\frac{1-j}{2},\frac{2-j}{2};1-j;\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t.$$

也就是说, 使用 Catalan 数的积分表示(1.4)后, 等式(3.13)左边变成了一个积分, 这个积分的被积函数含有超几何函数 ${}_2F_1$. 由于因子 $t^{i-\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}$ 的存在, 也可以将此积分看做超几何函数 ${}_2F_1\left(\frac{1-j}{2},\frac{2-j}{2};1-j;\frac{1}{t}\right)$ 的一个 Beta 变换. 如何计算这个被积函数含有超几何函数的积分? 如何计算这样一个 Beta 变换? 根据经验, 我们知道计算这个积分或变换很难. 事实上, 我们还无法计算这个积分. 于是, 再次在 ResearchGate 网站上公开征解, 仍然没有得到满意、有用、奏效的答案和方法.

稍后, 我们发现了论文[2]和文[41]的第 6 节中所列的其它文献. 在这些文献所包含的结果和方法的启发下, 在数学软件 Mathematica 的计算结果之提示下, 我们猜测超几何函数 ${}_2F_1\left(\frac{1-j}{2},\frac{2-j}{2};1-j;\frac{1}{t}\right)$ 也许等于某个初等函数. 若如此, 计算上述积分就变得可能容易一些.

根据多年学术研究的经验和教训, 我们寄希望于所需要的结果已经存在, 并且就在某个地方躺着, 只是需要找到它而已. 抱着这个想法和念头, 我们开始在几部庞大的数学手册中寻找. 经过多方努力, 最终于 2017 年 3 月先后在[13, pp. 999~1000]和[30, pp. 442 and 449, Items 18.5.10 and 18.12.4]处发现了两个公式:

$$G_n^{\lambda}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(2\lambda+n)}{n!\Gamma(2\lambda)}\frac{\Gamma\left(\frac{2\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)}\int_0^{\pi}\left(t+\sqrt{t^2-1}\cos\varphi\right)^n \sin^{2\lambda-1}\varphi\,\mathrm{d}\varphi, \tag{3.14}$$

$$G_n^{\lambda}(t) = \frac{(2t)^n\Gamma(\lambda+n)}{n!\Gamma(\lambda)}\,{}_2F_1\left(-\frac{n}{2},\frac{1-n}{2};1-\lambda-n;\frac{1}{t^2}\right). \tag{3.15}$$

其中 $|t|<1$, 而 $G_n^{\lambda}(t)$ 表示由

$$F^{\lambda}(\alpha,t) = \frac{1}{(1-2t\alpha+\alpha^2)^{\lambda}} = \sum_{k=0}^{\infty} G_k^{\lambda}(t)\alpha^k, \ |t|<1$$

生成的 Gegenbauer 多项式. 在等式(3.14)和(3.15)中取 $n=j-1$, $\lambda=1$ 后, 我们非常幸运地得到

$$ {}_2F_1(\frac{1-j}{2},\frac{2-j}{2};1-j;\frac{1}{t^2}) = \frac{j}{2^j}\frac{1}{t^{j-1}}\int_0^{\pi}(t+\sqrt{t^2-1}\cos\varphi)^{j-1}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = $$

$$ \frac{j}{2^j}\frac{(t^2-1)^{\frac{j-1}{2}}}{t^{j-1}}\int_0^{\pi}(\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}+\cos\varphi)^{j-1}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{j}{2^j}\frac{(t^2-1)^{\frac{j-1}{2}}}{t^{j-1}}\int_0^{\pi}\sum_{l=0}^{j-1}\mathrm{C}_{j-1}^{l}(\frac{t}{\sqrt{t^2-1}})^{j-1-l}\cos^l\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = $$

$$ \frac{j}{2^j}\frac{(t^2-1)^{\frac{j-1}{2}}}{t^{j-1}}\sum_{l=0}^{j-1}\mathrm{C}_{j-1}^{l}(\frac{t}{\sqrt{t^2-1}})^{j-1-l}\int_0^{\pi}\cos^l\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{j}{2^j}\frac{(t^2-1)^{\frac{j-1}{2}}}{t^{j-1}}(\frac{t}{\sqrt{t^2-1}})^{j-1}\sum_{l=0}^{j-1}\mathrm{C}_{j-1}^{l}(\frac{\sqrt{t^2-1}}{t})^{l}\frac{(-1)^l+1}{l+1} = $$

$$ \frac{j}{2^j}\sum_{l=0}^{j-1}\mathrm{C}_{j-1}^{l}(\frac{\sqrt{t^2-1}}{t})^{l}\frac{(-1)^l+1}{l+1} = \frac{1}{2^j}\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}[(1+\frac{\sqrt{t^2-1}}{t})^j-(1-\frac{\sqrt{t^2-1}}{t})^j], $$

其中 $0\neq|t|<1$. 这样, 我们得到了想要的结果.

引理 3.5 ([55, Lemma 2.6]) 对于 $0\neq|t|<1$ 和 $j\in\mathbb{N}$,

$$ {}_2F_1(\frac{1-j}{2},\frac{2-j}{2};1-j;\frac{1}{t^2}) = \frac{1}{2^j}\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}[(1+\frac{\sqrt{t^2-1}}{t})^j-(1-\frac{\sqrt{t^2-1}}{t})^j]. $$

后来有位内行专家告诉我们, 能够找到超几何函数 ${}_2F_1(\frac{1-j}{2},\frac{2-j}{2};1-j;\frac{1}{t})$ 的上述初等函数表示是极其困难的.

根据超几何函数 ${}_2F_1(\frac{1-j}{2},\frac{2-j}{2};1-j;\frac{1}{t})$ 的上述初等函数表示, 我们继续小心仔细、多方尝试地计算下去, 得到

$$ \frac{4^i}{2\pi}\int_0^1 t^{i-\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}{}_2F_1(\frac{1-j}{2},\frac{2-j}{2};1-j;\frac{1}{t})\,\mathrm{d}t = $$

$$ \frac{4^i}{2\pi}\int_0^1 t^{i-\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2^j}\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t-1}}[(1+\frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t}})^j-(1-\frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t}})^j]\,\mathrm{d}t = $$

$$ \frac{2^{2i-j}}{2\pi}\mathrm{i}\int_0^1 t^{i-1}[(1+\sqrt{1-\frac{1}{t}})^j-(1-\sqrt{1-\frac{1}{t}})^j]\,\mathrm{d}t = \frac{2^{2i-j}}{\pi}\mathrm{i}\int_0^{\infty}\frac{s}{(1+s^2)^{i+1}}[(1-\mathrm{i}s)^j-(1+\mathrm{i}s)^j]\,\mathrm{d}s = $$

$$ \frac{2^{2i-j}}{\pi}\mathrm{i}\int_0^{\infty}\frac{s}{(1+s^2)^{i+1}}[(\sqrt{1+s^2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\arctan s})^j-(\sqrt{1+s^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arctan s})^j]\,\mathrm{d}s = \frac{2^{2i-j}}{\pi}\mathrm{i}\int_0^{\infty}\frac{s}{(1+s^2)^{i-\frac{j}{2}+1}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\arctan s}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\arctan s})\,\mathrm{d}s = $$

$$ \frac{2^{2i-j}}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{s}{(1+s^2)^{i-\frac{j}{2}+1}}\sin(j\arctan s)\,\mathrm{d}s = \frac{2^{2i-j}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan t}{(1+\tan^2 t)^{i-\frac{j}{2}+1}}\sin(jt)\sec^2 t\,\mathrm{d}t = $$

$$ \frac{2^{2i-j}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan t}{\sec^{2i-j}t}\sin(jt)\,\mathrm{d}t = \frac{2^{2i-j}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos^{2i-j-1}t\sin(jt)\,\mathrm{d}t = $$

$$ \frac{2^{2i-j}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos((j-1)t)-\cos((j+1)t)]\cos^{2i-j-1}t\,\mathrm{d}t. $$

其中 i 是虚数单位.

为了继续计算出明确的结果, 几经周折, 我们找到了

引理 3.6 ([13, p. 399]) 当 $\mathbf{R}(v)>0$ 时,

$$ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{v-1}x\cos(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2^v vB(\frac{v+a+1}{2},\frac{v-a+1}{2})}. $$

其中 $B(\alpha,\beta)$ 是经典的 Beta 函数.

根据引理 3.6 继续计算, 得到

$$ \frac{2^{2i-j}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos((j-1)t)-\cos((j+1)t)]\cos^{2i-j-1}t\,\mathrm{d}t = $$

$$ \frac{2^{2i-j}}{\pi}[\frac{\pi}{2^{2i-j}(2i-j)B(i,i-j+1)}-\frac{\pi}{2^{2i-j}(2i-j)B(i+1,i-j)}] = $$

$$\frac{1}{2i-j}\Big[\frac{1}{B(i,i-j+1)}-\frac{1}{B(i+1,i-j)}\Big]=\frac{1}{2i-j}\Big[\frac{\Gamma(2i-j+1)}{\Gamma(i)\Gamma(i-j+1)}-\frac{\Gamma(2i-j+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(i-j)}\Big]=$$

$$(2i-j-1)!\Big[\frac{1}{\Gamma(i)\Gamma(i-j+1)}-\frac{1}{\Gamma(i+1)\Gamma(i-j)}\Big]=$$

$$(2i-j-1)!\Big[\frac{1}{(i-1)!(i-j)!}-\frac{1}{i!(i-j-1)!}\Big]=\frac{j}{i}\mathrm{C}_{2i-j-1}^{i-1}.$$

至止，我们完整地证明了定理 3.4.

3.9 四个恒等式的证明

当经过千辛万苦证明了定理 3.2 和定理 3.4 之后，再来证明恒等式(3.7)至(3.10)就易如反掌了. 恒等式(3.7)至(3.9)的证明均来自于矩阵方程 $A_nA_n^{-1}=A_n^{-1}A_n=I_n$ 的具体展开，参看[55, Theorem 5.2]及其证明. 恒等式(3.10)的证明来自于综合(3.6)、定理 3.4 和方程(3.12)的数学归纳法证明过程，参看[55, Theorem 5.3]及其证明.

3.10 一个新的反演定理

在组合论中，最基本、最简单的反演定理之一是

$$s_n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^kS_k \text{ 当且仅当 } S_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\mathrm{C}_n^ks_k,$$

其中 $\{s_n,n\geqslant 0\}$ 和 $\{S_n,n\geqslant 0\}$ 是两个复数列.

实际上，组合论中的每个反演定理对应于一个下三角可逆矩阵及其(下三角)逆矩阵. 因此，根据矩阵 A_n 和它的逆矩阵 A_n^{-1} 的表达式，我们可以得到一个新的反演定理.

定理 3.5 ([55, Theorem 4.3 和 Remark 6.2]) 对于 $n\geqslant k\geqslant 1$，设 s_k 和 S_k 是两个不依赖于 n 的序列，那么

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{C}_k^{n-k}S_k$$

当且仅当

$$(-1)^nnS_n=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{C}_{2n-k-1}^{n-1}(-1)^kks_k.$$

定理 3.5 已在[32, 46, 47, 53]和相关文献中得到引用和应用.

3.11 研究成果与已知结果的关系

当完成一项研究的时候，最好能够找到新结果与以前已有结果的关系，并进行比较、对比、联系、应用等. 在[55, Remark 6.3]中，我们考虑了这个事项.

恒等式(3.7)重新发现了[67, p. 2187, Theorem 2, Eq. (15b)]. 恒等式(3.7)是在恒等式(3.13)中取 $i=j\in\mathbb{N}$ 的特殊情况. 也就是说，恒等式 (3.13)推广了恒等式(3.7)和[67, p. 2187, Theorem 2, Eq. (15b)].

当在恒等式(3.8)中取 $j=1$ 时，我们可以推导出在[16, p. 322, Theorem 12.1]中的恒等式

$$C_n=\sum_{r=1}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}(-1)^{r-1}\mathrm{C}_{n-r+1}^{r}C_{n-r},\ n\geqslant 1. \tag{3.16}$$

恒等式(3.16)也被[27, Theorem 1]中的第三个式子所推广. 恒等式(3.7)已在文[4]中进行了推广.

4 文后说明与致谢

作者曾经于 2017 年 6 月 22 日在昆明理工大学理学院、于 2017 年 7 月 17 日在苏州西交利物浦大学主办的 International Workshop on Understanding and Mitigating Data Uncertainty in Smart Systems 上、于 2017 年 7 月 22 日在佛山科技学院承办的全国不等式研究会第 8 次学术会议上、于 2018 年 12 月 17 日在高雄师范大学以学术报告的形式讲述过该项研究的过程和结果.

为 2017 年 10 月 20 日于内蒙古民族大学数学学院所作的一次学术报告，作者特意准备了一篇演讲稿.

本文的基本结构就是在特意准备的演讲稿之基础上进行些微的修订而成.

在此特意向昆明理工大学、内江师范学院的何圆博士、苏州西交利物浦大学的韩籍教师 Sanghyuk Lee 博士、内蒙古民族大学的席博彦教授、台湾中山大学的姚任之教授、高雄师范大学的林英哲、杜威仕教授等许多同仁表示感谢, 感谢他们的热烈邀请和盛情款待.

还要感谢罗见今和王小元两位先生于 2018 年 3 月 14 日帮助证实文献[61]的准确信息.

参考文献

[1] Abramowitz M., Stegun I. A. *Handbook of mathematical functions with formulas*, *graphs*, *and mathematical tables* [M]. National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 55, 10th printing, Washington: 1972
[2] Amdeberhan T., Guan X., Jiu L., et al. *A series involving Catalan numbers*: *proofs and demonstrations* [J]. Elem. Math., 2016, 71(3): 109~121
[3] Bernstein D. S. *Scalar*, *vector*, *and matrix mathematics*: *theory*, *facts*, *and formulas* [M]. Revised and Expanded Edition. Princeton: Princeton University Press, 2018
[4] W. Chu. *Further identities on Catalan numbers* [J]. Discrete Math., 2018, 341(11): 3159~3164
[5] Comtet L. *Advanced combinatorics*: *the art of finite and infinite expansions* [M]. Revised and Enlarged Edition. Dordrecht and Boston: D. Reidel Publishing Co., 1974
[6] Dana-Picard T. *Integral presentations of Catalan numbers* [J]. Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech., 2010,41(1): 63~69
[7] Dana-Picard T. *Integral presentations of Catalan numbers and Wallis formula* [J]. Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech., 2011, 42(1): 122~129
[8] Dana-Picard T. *Parametric integrals and Catalan numbers* [J]. Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech., 2005, 36(4): 410~414
[9] Dana-Picard T., Zeitoun D. G. *Parametric improper integrals*, *Wallis formula and Catalan numbers* [J]. Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech., 2012, 43(4): 515~520
[10] Dunkel O., Bristol W. A., Church W. R., et al. *Problems and solutions*: *solutions*: 3421 [J]. Amer. Math. Monthly, 1931, 38 (1): 54~57
[11] Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., et al. *Higher transcendental functions*, Vol. III. *Based on notes left by Harry Bateman* [M]. Reprint of the 1955 original. Robert E. Krieger Publishing Co., Inc., Melbourne, Fla.: 1981
[12] Fox L., Parker, I. B. *Chebyshev polynomials in numerical analysis* [M]. London: Oxford University Press, 1968
[13] Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. *Table of integrals*, *series and products* [M]. Amsterdam: Elsevier/Academic Press, 2015
[14] Grimaldi R. P. *Fibonacci and Catalan numbers*: *an introduction* [M]. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc., 2012
[15] Kim T., Kim D. S., Seo J. J., et al. *Some identities of Chebyshev polynomials arising from non-linear differential equations* [J]. J. Comput. Anal. Appl., 2017, 23 (5): 820~832
[16] Koshy T. *Catalan numbers with applications* [M]. Oxford: Oxford University Press, 2009
[17] Larcombe P. J. *On the history of the Catalan numbers*: *a first record in China* [J]. Math. Today (Southend-on-Sea), 1999, 35(3): 89~89
[18] Larcombe P. J. *The 18th century Chinese discovery of the Catalan numbers* [J]. Math. Spectrum, 1999/2000, 32(1): 5~7
[19] Lin G. D. *On powers of the Catalan number sequence* [J]. Discrete Mathematics, 2018
[20] 刘建军. 明安图与 Catalan 数[J]. 数学研究与评论, 2002, 22(4): 589~594
[21] Liu F. F., Shi X. T., Qi F. *A logarithmically completely monotonic function involving the gamma function and originating from the Catalan numbers and function* [J]. Glob. J. Math. Anal., 2015, 3(4): 140~144
[22] 罗见今. 明安图是卡塔兰数的首创者[J]. 内蒙古大学学报(自然科学版) , 1988, 19(2): 239~245
[23] Luo J. J. *Catalan numbers in the history of mathematics in China* [C]. Combinatorics and Graph Theory: Proc. Spring School and International Conference on Combinatorics, 1992: 68~70
[24] Luo J. J. *Ming Antu and his power series expansions* [J]. Seki, founder of modern mathematics in Japan, 2013, 39: 299~310
[25] 马欣荣. 关于明安图一项数学成就的几点评注[J]. 数学研究与评论,2002, 22(4): 595~598
[26] X. R. Ma. *The general solution of Ming Antu's problem* [J]. Acta Math. Sin. (Engl. Ser.), 2004, 20(1): 157~162
[27] Mahmoud M. and Qi F. *Three identities of the Catalan-Qi numbers* [J]. Mathematics, 2016, 4(2)
[28] Mason J. C., Handscomb D. C. *Chebyshev polynomials* [M]. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2003
[29] Nkwanta A., Tefera A. *Curious relations and identities involving the Catalan generating function and numbers* [J]. J. Integer Seq., 2013, 16(9)
[30] Olver F. W. J., Lozier D. W., Boisvert R. F., et al. *NIST handbook of mathematical functions*[M]. New York: Cambridge University Press, 2010
[31] Penson K. A., Sixdeniers J.M. *Integral representations of Catalan and related numbers* [J]. J. Integer Seq., 2001, 4(2)
[32] Qi F. *A simple form for coefficients in a family of ordinary differential equations related to the generating function of the Legendre polynomials* [J]. Adv. Appl. Math. Sci., 2018, 17(11): 693~700
[33] Qi F. *An improper integral*, *the Beta function*, *the Wallis ratio*, *and the Catalan numbers* [J]. Probl. Anal. Issues Anal., 2018, 25(7): 104~115
[34] Qi F. *Parametric integrals*, *the Catalan numbers*, *and the Beta function* [J]. Elem. Math, 2017, 72(3): 103~110
[35] Qi F. *Some properties of the Catalan numbers* [J]. Ars Combinatoria Waterloo Then Winnipeg, 2018, 144
[36] Qi F., Akkurt A., Yildirim H. *Catalan numbers*, *k-Gamma and k-Beta functions*, *and parametric integrals* [J] J. Comput. Anal. Appl., 2018, 25(6): 1036~1042
[37] Qi F., Cerňanová V., Semenov Y. S. *Some tridiagonal determinants related to central Delannoy numbers*, *the Chebyshev polynomials*, *and the Fibonacci polynomials* [J]. Politehn. Univ. Bucharest Sci. Bull. Ser. A Appl. Math. Phys., 2019, 81(1): 123~136
[38] Qi F., Cerone P. *Some properties of the Fuss-Catalan numbers* [J]. Mathematics, 2018, 6(12)
[39] Qi F., Guo B. N. *Explicit formulas for special values of the Bell polynomials of the second kind and for the Euler numbers and polynomials* [J]. Mediterr. J. Math., 2017, 14(3)
[40] Qi F., Guo B. N. *Identities of the Chebyshev polynomials*, *the inverse of a triangular matrix*, *and identities of the Catalan numbers*[J/OL]. https: //doi.org/10.20944/preprints201703.0209.v1
[41] Qi F., Guo B. N. *Integral representations of the Catalan numbers and their applications* [J]. Mathematics, 2017, 5(3)
[42] Qi F., Guo B. N. *Logarithmically complete monotonicity of a function related to the Catalan-Qi function* [J]. Acta Univ. Sapientiae Math., 2016, 8(1): 93~102
[43] Qi F., Guo B. N. *Logarithmically complete monotonicity of Catalan-Qi function related to Catalan numbers* [J]. Cogent Math., 2016, 3
[44] Qi F., Guo B. N. *Some properties and generalizations of the Catalan*, *Fuss*, *and Fuss-Catalan numbers* [A]. Mathematical Analysis and Applications: Selected Topics[M]. John Wiley & Sons, Inc., 2018: 101~133
[45] Qi F., Mahmoud M., Shi X. T., et al. *Some properties of the Catalan-Qi function related to the Catalan numbers* [J]. SpringerPlus, 2016(5)
[46] Qi F., Niu D. W., Guo B. N. *Some identities for a sequence of unnamed polynomials connected with the Bell polynomials* [J]. Revista De La Real Academia De Ciencias Exactas Fisicas Y Naturales Serie A Matematicas, 2018, 112(8)

(下转第 22 页)