

# 基于谱方法求解器的非均匀电介质下 电势分布特性的研究

孙毅祥

(1. 北京长征天民高科技有限公司, 北京 100176; 2. 中国运载火箭技术研究院第十五研究所, 北京 100076)

**摘要:** 以往研究中求静电场电势时, 主要是求解均匀电介质的泊松方程, 缺少对介电系数非均匀效应的分析. 本文针对非均匀电介质的修正泊松方程进行求解, 并研究非均匀介电系数对电势分布的影响. 首先采用高效准确的谱方法求解器对极坐标系下的泊松方程进行求解, 在较少的网格点下数值解能与理论解吻合良好. 随后, 对均匀介质泊松方程求解非均匀介质的电势分布所引入的误差进行研究, 发现介电系数存在径向和周向梯度时均会产生误差, 且周向梯度影响更明显, 同时会破坏精确解原始的分布特性. 最后, 准确求解了非均匀电介质的电势分布, 发现周向梯度对电势分布的影响更为显著, 并发现电势分布在介电系数梯度趋于无穷时的渐进解.

**关键词:** 静电场; 电势; 非均匀电介质; 泊松方程; 极坐标系; 谱方法

中图分类号: O241.82

文献标识码: A

文章编号: 1672-5298(2020)02-0012-05

## Investigation on the Distribution Characteristics of the Electric Potential in Inhomogeneous Dielectric Using the Spectral-Method-Based Poisson Equation Solver

SUN Yixiang

(1. Beijing Long March Tian Min Hi-tech Company Limited, Beijing 100176, China;

2. The Fifteenth Research Institute of China Academy of Launch Vehicle Technology, Beijing 100076, China)

**Abstract:** Previous studies mainly solved the Poisson equation for homogeneous dielectric when solving the electrostatic potential field and lack the analysis on the inhomogeneous effect of the dielectric coefficient. In this paper, we turn to solve the modified Poisson equation for inhomogeneous dielectric and investigate the effect of the inhomogeneous dielectric coefficient on the electric potential field. First, we develop an efficient and accurate spectral-method-based solver for the Poisson equation in the system of polar coordinates, and get excellent agreement between numerical and analytic solutions with small grid number points. Next, we focus on the error brought by solving the electric potential field with inhomogeneous dielectric when using the homogeneous-dielectric-based Poisson equation. We find that this error exists with the gradient of the dielectric coefficient in either radial or circumferential direction. Furthermore, this error is more contributed by the circumferential gradient than the radial gradient of the dielectric coefficient, which would break the distribution characteristics of the original accurate solution meanwhile. Finally, we accurately solve the electric potential field with inhomogeneous dielectric, find that the circumferential gradient is more significant than the radial gradient and obtain the asymptotic solution with the gradient of the dielectric coefficient approaching infinity.

**Key words:** electrostatic field; electric potential; inhomogeneous dielectric; Poisson equation; system of polar coordinates; spectral method

## 0 引言

静电学在工程中有诸多应用, 如静电场探测系统<sup>[1]</sup>、静电屏蔽技术<sup>[2]</sup>等. 在静电场的计算模拟中, 电势求解是关键的一环. 由于均匀电介质中静电场高斯定理可以转换为泊松方程<sup>[3]</sup>, 因此静电场不用求解复杂的麦克斯韦方程, 而只需求解二阶椭圆型偏微分方程. 泊松方程常见的数值求解方法包括有限差分法<sup>[4]</sup>、谱方法<sup>[5]</sup>、有限元法等.

收稿日期: 2020-04-02

基金项目: 青年科学基金项目“高频平面变压器寄生参数解析建模研究”(51507006)

作者简介: 孙毅祥(1966-), 男, 北京人, 高级工程师. 主要研究方向: 电子测量技术

谱方法相比于有限差分法、有限元法而言, 其特点之一是用于近似的基函数不是局部点的低阶多项式, 而是全局多项式<sup>[6]</sup>(如 Legendre 多项式、Chebyshev 多项式). 当方程解光滑时其收敛速度很快, 可以在较少的网格点上实现高精度数值模拟<sup>[7, 8]</sup>, 适合于泊松方程的高效准确求解. 谱方法一般分为三类<sup>[9]</sup>: 谱-Galerkin 法、谱配置法和谱- $\tau$  法. 其中谱配置法将偏微分方程转换为矩阵方程, 且对于 Chebyshev 多项式其配置点可显式给出, 因此无论从计算效率还是编程复杂度而言都是较优的选择. 对于泊松方程来说, 若在极坐标系下求解, 谱方法可以直接给出电势在径向和周向的变化, 但需要额外处理方程在极坐标系原点奇异的问题. 目前主要有两种解决方法, 一种是构造奇点处的特殊边界条件<sup>[10, 11]</sup>, 另一种则是选取合理的配置点(如 Chebyshev-Gauss-Radau 配置点)来避开奇点位置<sup>[12, 13]</sup>. 本文采用第二种奇点处理方式, 建立了极坐标系下的泊松方程谱方法求解器.

虽然对均匀电介质而言静电场高斯定理可以转化为泊松方程, 但对于非均匀电介质, 原方程将多出介电系数的空间梯度项, 若此时仍用原始泊松方程进行求解, 将会引入误差, 且误差随介电系数的空间梯度增大而增大. 非均匀电介质在实际中也有对应情况, 如存在介质分界面(水-空气)或介质本身连续非均匀. 因此电介质非均匀的情形无论是理论研究还是实际应用都有一定价值. 然而目前较少有研究直接关注非均匀介电系数对电势的具体影响机制, 尽管近年有部分研究者注意到对修正泊松方程进行求解更符合实际(如 Nagel<sup>[14]</sup>的工作), 但并未对介质非均匀如何影响电势分布进行研究与分析. 本文基于谱方法求解器对非均匀电介质的修正泊松方程进行求解, 主要研究电介质非均匀时仍采用原始泊松方程求解而引入的结果误差, 以及电介质非均匀对方程解的影响.

## 1 极坐标系下修正泊松方程的求解

静电场高斯定理的微分形式为

$$\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \phi) = -\rho. \quad (1)$$

其中  $\phi$  为电势,  $\rho$  为电荷密度,  $\varepsilon$  为介电系数. 若在真空中或电介质空间分布均匀, 介电系数可从梯度算子中提出, 式(1)便化为标准的泊松方程. 但对于电介质非均匀的情况, 式(1)便转化为

$$\nabla^2 \phi + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \varepsilon \cdot \nabla \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (2)$$

式(2)等号左端第二项即为电介质非均匀时的额外项, 若忽略此项并按原始泊松方程进行求解, 将会引入误差. 下面推导修正泊松方程(2)在极坐标系下的形式, 并给出谱配置法的求解细节.

极坐标系下, 梯度算子可写作径向和周向单位矢量的组合:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta. \quad (3)$$

将其代入式(2)并在等号两侧乘以  $r^2$ , 于是式(2)转化为

$$r^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + (r + g_1 r^2) \frac{\partial \phi}{\partial r} + g_2 \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} r^2. \quad (4)$$

其中包含  $g_1$ 、 $g_2$  的项分别为介电系数在径向和周向梯度引入的额外项, 表达式为

$$g_1 = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r}, \quad g_2 = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta}. \quad (5)$$

为方便使用谱配置法, 本文只考虑  $g_1$  与  $g_2$  分别仅与  $r$  和  $\theta$  有关的情况, 即  $g_1 = g_1(r)$ ,  $g_2 = g_2(\theta)$ . 此时式(4)左端系数已实现变量分离, 可将解  $\phi$  展开为基函数与各配置点处解的乘积的线性组合. 本文考虑在去除极点的圆盘  $(0, R_0] \times [0, 2\pi)$  上求解式(4), 径向采用 Chebyshev 多项式展开, 同时为避开奇点, 采用 Chebyshev-Gauss-Radau 配置点

$$\alpha_j = \cos\left(\frac{2\pi j}{2N_r + 1}\right) \in (-1, 1], j = 0, 1, \dots, N_r. \quad (6)$$

在周向则采用 Fourier 展开, 配置点为

$$\theta_j = \frac{2\pi j}{N_\theta} \in [0, 2\pi), j = 0, 1, \dots, N_\theta. \quad (7)$$

注意到  $r$  与配置点  $\alpha_j$  定义域不同, 因此采用坐标变换

$$r = \frac{1+\alpha}{2} R_0, \quad (8)$$

此时式(4)转化为

$$(1+\alpha)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha^2} + (1+\alpha + g_1(1+\alpha)^2) \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} + g_2 \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \left( \frac{1+\alpha}{2} R_0 \right)^2. \quad (9)$$

在径向与周向分别展开, 式(9)最终表示为矩阵方程的形式<sup>[15]</sup>:

$$\sum_{k=0}^{N_r} A_{ik} \Phi_{kj} + \sum_{k=0}^{N_\theta-1} \Phi_{ik} B_{kj} = F_{ij}; i = 0, 1, \dots, N_r, j = 0, 1, \dots, N_\theta - 1. \quad (10)$$

系数矩阵及源项矩阵的元素为

$$\begin{cases} A_{ik} = (1+\alpha_i)^2 D_{r,ik}^{(2)} + ((1+\alpha_i) + g_{1,i}(1+\alpha_i)^2) D_{r,ik}^{(1)}, \\ B_{kj} = g_{2,j} D_{\theta,jk}^{(1)} + D_{\theta,jk}^{(2)}, \\ F_{ij} = -\frac{\rho_{ij}}{\varepsilon_{ij}} \left( \frac{1+\alpha_i}{2} R_0 \right)^2. \end{cases} \quad (11)$$

其中径向一阶导数算子对应的离散矩阵元素

$$D_{r,ik}^{(1)} = \begin{cases} \frac{(-1)^{i+k} c_k}{2c_i} \frac{1}{\sin^2(k\gamma) \cos^2(i\gamma) - \cos^2(k\gamma) \sin^2(i\gamma)}, i \neq k, \\ -\frac{1}{2\sin^2(2i\gamma)}, 1 \leq i = k \leq N_r, \\ \frac{N_r(N_r+1)}{3}, i = k = 0. \end{cases} \quad (12)$$

这里

$$c_0 = \frac{1}{2}, c_i = \cos(i\gamma), i = 1, 2, \dots, N_r, \gamma = \frac{\pi}{2N_r+1}. \quad (13)$$

径向二阶导数算子对应的离散矩阵

$$D_r^{(2)} = D_r^{(1)} D_r^{(1)}. \quad (14)$$

周向一阶、二阶导数算子对应的离散矩阵则跟  $N_\theta$  的奇偶性有关, 这里给出  $N_\theta$  为偶数时的离散矩阵, 奇数情况参见文[9]:

$$D_{\theta,jk}^{(1)} = \begin{cases} \frac{1}{2} (-1)^{j+k} \cot(h_{jk}), j \neq k, \\ 0, j = k, \end{cases} D_{\theta,jk}^{(2)} = \begin{cases} \frac{1}{4} (-1)^{j+k} N + \frac{(-1)^{j+k+1}}{2\sin^2 h_{jk}}, j \neq k, \\ -\frac{(N-1)(N-2)}{12}, j = k, \end{cases} h_{jk} = \frac{\theta_j - \theta_k}{2}. \quad (15)$$

以上即为修正泊松方程的离散求解形式. 若要考虑  $r = R_0$  处的第一类边界条件, 只需在式(10)两侧减去  $r = R_0$  处的源项值  $F^{(BC)}$  即可. 在本文中,  $F^{(BC)}$  的各元素可写作<sup>[15]</sup>

$$F_{ij}^{(BC)} = A_{i0} \Phi_{0j}. \quad (16)$$

对形如式(10)的矩阵方程, 可采用文[15]中的两步算法进行求解, 最终得到电势  $\phi$  的离散解.

## 2 原始泊松方程对非均匀电介质的电势求解误差研究

若采用原始泊松方程对非均匀电介质的电势进行计算, 即忽略式(2)左端第二项, 则会引入误差, 本节拟对此误差进行评估. 首先给出计算采用的参数条件. 为与解析解进行比较, 对解  $\phi = \exp(-r^2) \sin \theta$  (单

位:  $V$ )对应的修正泊松方程进行数值求解, 源项可通过将解析的电势解代入式(2)求出. 这里需要给定介电系数的表达式以数值求出  $\phi$ . 本文拟分别考虑介电系数在径向和周向梯度下的影响, 并对径向部分舍去高阶项而只考虑线性相关项, 因此给定如下表达式:

$$\varepsilon = C_3 \varepsilon_0 (1 + C_1 r)(1 + C_2 \sin \theta). \quad (17)$$

其中真空中介电常数  $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} (\text{F/m})$ , 正弦函数可使得介电系数  $\varepsilon$  在周向为周期函数, 常数  $C_1$  和  $C_2$  其中之一为 0, 以满足式(5)中  $g_1$  与  $g_2$  分别只与  $r$  和  $\theta$  有关的条件. 取  $C_3 = 3$ , 目的是在模拟的参数范围内保证  $\varepsilon > \varepsilon_0$  以符合物理实际. 此外半径  $R_0 = 1\text{m}$ .

首先给出网格收敛性与程序准确性的验证. 取  $N_r = N_\theta$ ,  $C_1 = C_2 = 0$ , 并定义数值解与解析解之差的二范数为误差:

$$\text{error} = \|\Phi - \Phi_{\text{analytic}}\|_2. \quad (18)$$

图1给出了误差随网格点数  $N_r + N_\theta$  的变化情况. 不难看出, 随着网格点数的增多, 误差呈指数级下降, 且仅需  $N_r = N_\theta = 10$  时绝对误差就已下降到  $10^{-9}$  量级, 即谱配置法仅需很少的网格点就可以达到足够高的精度, 证明了此方法的优越性, 也验证了本程序的准确性. 另外, 误差下降到一定程度后会出现反弹, 这是由计算机误差累计引起的<sup>[16]</sup>, 但此时误差已经足够小, 不会对最终结果造成明显影响.

随后, 对原始泊松方程(式(2)左端移去第二项)和修正泊松方程(式(2))分别求解, 方程右端源项由解析解代入修正泊松方程计算得到, 介电系数给定为式(17), 离散点数取  $N_r = 20$ ,  $N_\theta = 40$ . 图2给出了  $C_1 = 10$ ,  $C_2 = 0$  时的解析解、修正泊松方程解和原始泊松方程解. 可看出, 修正泊松方程解与解析解拟合良好, 但原始泊松方程解却产生了偏离, 除  $\theta = 0^\circ$  和  $180^\circ$  外, 其余等势线相对于解析解均向外扩张, 且上下半平面分别越靠近  $\theta = 90^\circ$  和  $270^\circ$ , 与解析解的差异越明显, 而在靠近  $\theta = 0^\circ$  和  $180^\circ$  附近差异不明显, 即呈现出各向异性的特性.

以上是介电系数仅在径向分布不均的情况. 当介电系数仅在周向分布不均时, 图3给出了解析解和  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 0.1$  时的原始泊松方程解(修正泊松方程解与解析解仍然吻合很好, 这里不再给出). 不难看出, 介电系数周向分布不均时, 用原始泊松方程得到的解的等势线不仅发生了偏移, 还破坏了解析解关于  $Y$  轴反对称的特点. 此外, 为评估原始泊松方程解与解析解的误差, 仍用式(18)进行计算. 结果发现  $C_1 = 10$ ,  $C_2 = 0$  和  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 0.1$  时, 原始泊松方程的误差分别约为 1.21 和 19.07, 而修正泊松方程的误差在  $10^{-14}$  量级. 综合可知, 介电系数在周向存在很小的梯度( $C_2 = 0.1$ ), 就会使得用原始泊松方程求解造成比介电系数存在较大径向梯度时( $C_1 = 10$ )求解更大的误差, 即介电系数径向梯度影响更显著.

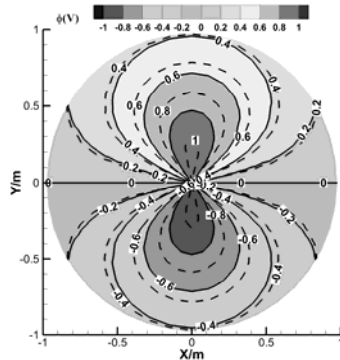


图2  $C_1=10, C_2=0$  时电势的解析解(云图)、修正泊松方程解(实线)、原始泊松方程解(虚线)

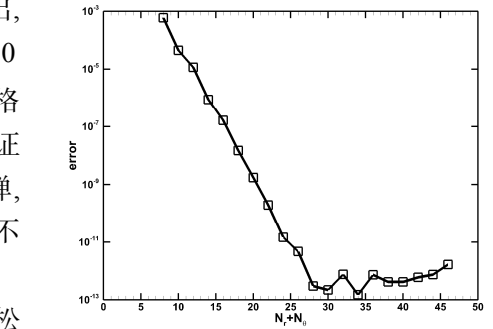


图1 数值解与解析解的误差随网格点数的变化

图2给出了  $C_1 = 10$ ,  $C_2 = 0$  时的解析解、修正泊松方程解和原始泊松方程解. 可看出, 修正泊松方程解与解析解拟合良好, 但原始泊松方程解却产生了偏离, 除  $\theta = 0^\circ$  和  $180^\circ$  外, 其余等势线相对于解析解均向外扩张, 且上下半平面分别越靠近  $\theta = 90^\circ$  和  $270^\circ$ , 与解析解的差异越明显, 而在靠近  $\theta = 0^\circ$  和  $180^\circ$  附近差异不明显, 即呈现出各向异性的特性.

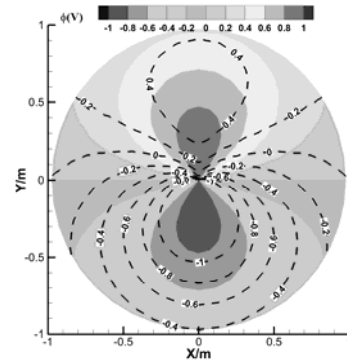


图3  $C_1=0, C_2=0.1$  时电势的解析解(云图)、原始泊松方程解(虚线)

### 3 非均匀电介质对电势的影响

本部分采用修正泊松方程(式(2))对非均匀电介质中的电势分布进行求解, 目的在于研究介电系数不均匀程度发生改变时电势分布的变化, 从而表征电介质非均匀效应的影响. 与第 2 部分不同的是, 本部分固定的是式(2)中的电荷密度  $\rho$  的表达式, 该表达式由  $\phi = \exp(-r^2) \sin \theta$ ,  $\varepsilon = C_3 \varepsilon_0$  代入式(2)得到, 代表均匀电介质下的电荷密度; 而变动的则是  $\varepsilon$  表达式(17)中的常数  $C_1$  或  $C_2$ , 从而解  $\phi$  也是变动的, 于是可以评估  $C_1$  或  $C_2$  对解  $\phi$  的影响.

图 4 与图 5 分别给出了  $C_2=0$  时, 不同  $C_1$  取值对  $\theta=45^\circ$  和  $\theta=90^\circ$  处电势沿径向分布的影响. 不难看出, 介电系数径向梯度对  $\theta=45^\circ$  和  $\theta=90^\circ$  处的影响规律是相似的, 当  $C_1 > 0$  即介电系数沿径向有正梯度时, 电势下降, 且随  $C_1$  的增大而下降更多; 而当  $C_1 < 0$  即介电系数沿径向有负梯度时, 电势减小. 此外, 当  $C_1$  趋于无穷时, 电势分布有渐进解, 这是因为函数  $g_1$  在  $C_1$  趋于无穷时有极限  $\frac{1}{r}$ , 代入式(2)可求出电势的渐进解.

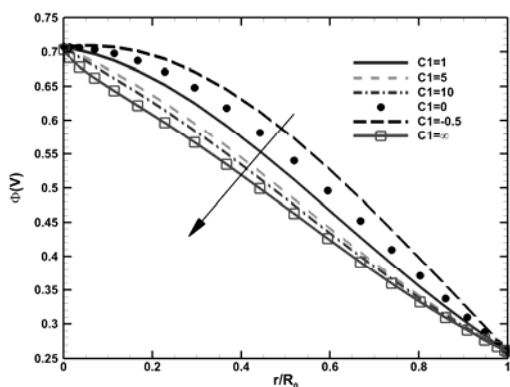


图 4  $C_2=0$  时不同  $C_1$  取值对  $\theta=45^\circ$  处电势的影响及渐进解

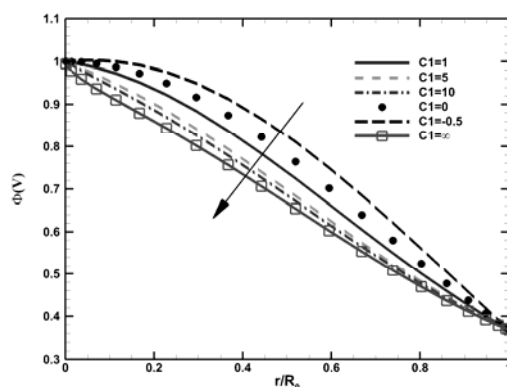


图 5  $C_2=0$  时不同  $C_1$  取值对  $\theta=90^\circ$  处电势的影响及渐进解

图 6 给出了  $C_1=0$  时, 不同  $C_2$  取值对  $\theta=45^\circ$  处电势沿径向分布的影响. 可看出,  $C_2 > 0$  时电势升高, 反之则降低. 同时, 电势的变化相对于  $C_1 \neq 0$ ,  $C_2=0$  时更明显, 如  $C_1=0$ ,  $C_2=0.5$  时最大电势可达到均匀介质( $C_1=C_2=0$ )时的 13 倍左右, 而  $C_1=10$ ,  $C_2=0$  时最大电势与均匀介质的情况差异很小. 这意味着周向的影响更为显著.  $\theta=90^\circ$  处电势分布规律与图 6 相似, 这里不再给出. 此外,  $C_2$  趋于无穷时, 电势分布也有渐进解, 但函数  $g_2$  的极限  $\frac{1}{\tan \theta}$  在  $\theta=0^\circ$  及  $180^\circ$  时是奇异的, 因此数值计算未能给出此时渐进解的分布.

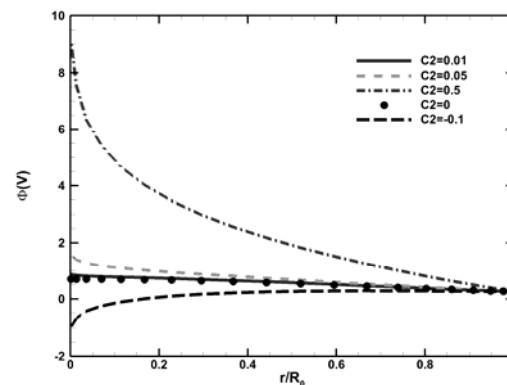


图 6  $C_1=0$  时不同  $C_2$  取值对  $\theta=45^\circ$  处电势的影响

### 4 结论

以往研究中静电场电势求解问题主要是求解均匀电介质的泊松方程. 本文针对非均匀电介质的修正泊松方程进行了谱方法求解并研究介电系数非均匀的影响. 首先建立了高效准确的谱方法求解器, 在较少的网格点下数值解就能与理论解良好吻合. 随后, 对采用原始泊松方程求解非均匀电介质的电势分布而引入的误差进行了研究, 发现介电系数存在径向和周向梯度时均会产生误差, 其中有周向梯度时仍用原始泊松方程求解不仅对电势数值的影响更大, 还会破坏精确解本身的分布特性(如关于  $Y$  轴的反对称特性). 最后, 用修正泊松方程准确求解了非均匀电介质的电势分布, 并研究了介电系数的梯度(下转第 26 页)